Décomposition en éléments simples – Révisions

Les attentes

1. Il faut savoir poser une division euclidienne pour déterminer la partie entière de développement de $\frac{P}{Q}$ lorsque $\deg P \geqslant \deg Q$.
2. Dans la pratique, il faut savoir décomposer une fraction de dénominateur de « bas » degré (par exemple, $\frac{1}{X(X-1)(X-2)}$ ou $\frac{X+3}{(X^2+1)^2}$) pour pouvoir calculer des intégrales, notamment.

3. Formule pour la partie polaire associée à un pôle simple.
4. Formule de décomposition de $\frac{P'}{P}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

1 Méthode pratique

On considère $F(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)^3(x^2+x+1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$. Il existe a, b, c, d, e, f, g, h réels et E polynôme tels que :

$$F(x) = E(x) + \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{(x-\beta)^2} + \frac{d}{(x-\beta)^3} + \frac{ex+f}{x^2+x+1} + \frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}$$

1. E : quotient de la division euclidienne du numérateur de F par son dénominateur. C'est la partie entière de F.
2. a : on multiplie F par $x-\alpha$ puis on évalue en $x = \alpha$.
3. d : on multiplie F par $(x-\beta)^3$ puis on évalue en $x = \beta$.
4. c : on retranche $\dfrac{d}{(x-\beta)^3}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par $x-\beta$, on multiplie par $(x-\beta)^2$ puis on évalue en $x = \beta$.
5. b : on retranche $\dfrac{c}{(x-\beta)^2}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par $x-\beta$, on multiplie par $x-\beta$ puis on évalue en $x = \beta$.
6. g, h : on multiplie F par $(x^2+x+1)^2$ puis on évalue en $x = j$ (racine de x^2+x+1). On trouve $gj+h$, d'où g et h.
7. e, f : on retranche $\dfrac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par x^2+x+1, on multiplie par x^2+x+1 puis on pose $x = j$. On trouve $ej+f$, d'où e et f.

D'autres relations peuvent aussi être utilisées, par exemple :

— On multiplie par x^k puis on fait tendre x vers $+\infty$.

— On prend des valeurs particulières de x.

— Utiliser des arguments de parité.

Exercice 1 : (source : cahier de calculs)
Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

$$\frac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)} \qquad \frac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)} \qquad \frac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$$

Exercice 2 : (source : cahier de calculs)
Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} \qquad \frac{2+X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2} \qquad \frac{1-X}{X(X+\pi)^2} \qquad \frac{1}{(X-\mathrm{i})^2(X-1-\mathrm{i})^2}$$

Exercice 3 : (source : cahier de calculs)
Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

$$\frac{X-3}{X^4-1} \qquad \frac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$$

2 Partie polaire associée à un pôle simple

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On appelle forme irréductible de F toute écriture de F de la forme $F = \frac{A}{B}$ avec A et B premiers entre eux. Une telle écriture est toujours possible, et unique à multiplication près par des scalaires non nuls.

Définition 1 – pôle et partie polaire

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction irréductible. On appelle *pôle* de F tout scalaire α qui est une racine de B.
Un *pôle simple* est une racine de B d'ordre de multiplicité 1.

On impose ici à l'écriture $F = \frac{A}{B}$ d'être irréductible pour qu'il ne soit pas possible de confondre les zéros et les pôles de F. En effet, quand A et B sont premiers entre eux, ils n'ont pas de racine commune.

Propriété 1 – partie polaire associée un pôle simple

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et α un pôle simple de F. La partie polaire associée à α est :

$$\frac{c}{X-\alpha} \quad \text{avec} \quad c = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$$

Cette formule est utile quand le dénominateur est écrit sous forme développée.

Démonstration : Comme α est un pôle simple, on a $\frac{A}{B} = \frac{c}{X-\alpha} + G$ avec $G \in \mathbb{K}(X)$ et α n'est pas un pôle de G. Comme d'habitude, pour obtenir c, on multiplie par $X - \alpha$:

$$\frac{(X-\alpha)A}{B} = c + (X-\alpha)G$$

mais en l'état, on ne peut pas évaluer en α (on aurait $\frac{0}{0}$). Comme α est racine de B d'ordre de multiplicité 1, il existe Q polynôme n'ayant pas α comme racine tel que $B = (X-\alpha)Q$. On en est à

$$\frac{A}{Q} = c + (X-\alpha)G$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver $Q(\alpha)$. Pour cela, on pense à dériver $B = (X-\alpha)Q$.

$$B' = (X-\alpha)Q' + Q \quad \text{puis} \quad Q(\alpha) = B'(\alpha)$$

✎ Exercice 4 : pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir la décomposition en éléments simples $\dfrac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{\omega}{X - \omega}$.

Exercice 5 : pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{1}{X^{2n} - 1}$.

3 Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$

Propriété 2

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, de degré n, P admet n racines comptées avec multiplicité et P se factorise sous la forme suivante

$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - r_k)$$

On a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - r_k}$$

Démonstration : dans le chapitre Fonctions vectorielles, on a vu la formule qui généralise $(uv)' = u'v + v'u$, à savoir

$$(f_1 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots + f_1 \dots f_{n-1} f_n'$$

Ici,

$$P' = a_n \prod_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq 1} (X - r_k) + a_n \prod_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq 2} (X - r_k) + \dots + a_n \prod_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq n} (X - r_k)$$

et P'/P donne bien le résultat recherché.

4 Un extrait de Mines 2025 PC

Exercice 6

Pour tout couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ fixé avec $p > q$, on définit la fraction rationnelle $F(X)$ par

$$F(X) = \frac{X^{q-1}}{1 + X^p}$$

1. Montrer qu'il existe des constantes $(a_0, b_0, \dots, b_{\lfloor p/2 \rfloor - 1}) \in \mathbb{C}^{\lfloor p/2 \rfloor + 1}$ telles que

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{a_0}{X + 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{b_k}{X - \overline{\omega_{p,k}}}$$

   où les $\omega_{p,k}$ sont des constantes que l'on précisera et $F(X)$ la fraction rationnelle définie au début de cette partie.
   Dans le cas où p est pair, on posera $a_0 = 0$.

2. Calculer alors a_0 dans le cas où p est impair puis montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, \lfloor p/2 \rfloor - 1]\!]$, b_k peut s'écrire sous la forme

$$b_k = -\frac{1}{p} e^{\mathrm{i} q \theta_k}$$

   où on a posé $\theta_k = (2k + 1)\frac{\pi}{p}$.

3. En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(X)$$

où, pour tout $0 \leqslant k \leqslant \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$F_k(X) = \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}$$

5 Un extrait de Centrale 2021

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, scindé à racines simples, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ ses racines. Montrer que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X-\alpha_k) A'(\alpha_k)} \tag{$*$}$$

Soit P dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

2. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifier que $X-1$ divise P_λ.

Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on note Q_λ le quotient de P_λ par $X-1$:

$$Q_\lambda(X) = \frac{P(\lambda X) - P(\lambda)}{X-1} \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$$

3. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{C}, Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.

On considère le polynôme $R(X) = X^{2n} + 1$. Pour k dans $[\![1, 2n]\!]$, on note $\varphi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{i\varphi_k}$.

4. Montrer que

$$R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)$$

5. À l'aide de la formule (*), montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n}+1}{X-\omega_k} \omega_k$$

puis en déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} \tag{$**$}$$

6. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

On pourra appliquer l'égalité (**) au polynôme X^{2n}.