
($\star$) **Exercice 1**
Montrer que si A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A^k = I_n$ pour un certain entier $k \geqslant 2$, alors $A^2 = I_n$. Que dire de la matrice A si k est impair ?

($\star\star$) **Exercice 2** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que si A est symétrique alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A.

($\star$) **Exercice 3** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner les valeurs propres et espaces propres de A.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres de A. Donner une base orthonormée constituée de vecteurs propres de A (on pourra s'aider du procédé d'orthonormalisation de Schmidt). Écrire alors la diagonalisation de A avec une matrice de passage orthogonale.

($\star\star$) **Exercice 4**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique S de valeurs propres positives telle que $A = S^2$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible. En utilisant la matrice $A^\top A$ et la question 1., montrer qu'il existe une matrice orthogonale R et une matrice symétrique S de valeurs propres strictement positives telles que $A = RS$.

($\star$) **Exercice 5** Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n, vérifiant $A^3 = -4A$. Montrer que A est la matrice nulle.

($\star$) **Exercice 6** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = A^\top A$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.
Hormis 4. et 5., les questions sont indépendantes.

1. Montrer que B est symétrique.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$.
3. Montrer que $B = 0$ si et seulement si $A = 0$.
4. Montrer que $\ker A = \ker B$.
5. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

($\star$) **Exercice 7**

1. $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et a est un vecteur unitaire de E. f est l'endomorphisme de E défini par :
$$\forall x \in E, \quad f(x) = x + 2\langle x, a\rangle a$$
Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.

2. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$. f est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in E, \quad f(M) = M^\top$$

Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.

3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int\limits_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. f est l'endomorphisme de E défini par :

$$f(P) = 2XP' + (X^2-1)P''$$

Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.

($\star\star$) Exercice 8 Soient a et b vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x + \langle x, a\rangle b$$

Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si la famille (a, b) est liée.

($\star$) Exercice 9 Soient E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On considère une base orthonormée de E, et on note S la matrice de f dans cette base et T la matrice de g dans cette base. On suppose enfin que S est symétrique et que T est antisymétrique.

1. Montrer que $\forall x \in E$, $f(x)$ et $g(x)$ sont orthogonaux.
2. Montrer que $\forall x \in E$, $\|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$.

($\star\star$) Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

1. (a) Montrer que pour tous P et Q éléments de E_n, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Montrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E_n.
2. Soit ψ définie sur E_n par $\psi(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$ où P' et P'' désignent les deux premiers polynômes dérivés du polynôme P.
   (a) Montrer que ψ est un endomorphisme de E_n.
   (b) ψ est-il bijectif ?
   (c) Montrer que ψ est diagonalisable.
3. (a) Montrer que pour tous P et Q de E_n : $\langle \psi(P), Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Retrouver ainsi le fait que ψ est diagonalisable.

($\star\star$) Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle , \rangle$ et de sa norme associée $\|.\|$. Soit f un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$.
On pose $\rho = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$. Montrer que $\rho = \|f\|_{\mathrm{op}}$.

($\star\star$) Exercice 12 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit f_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f_n(P)(X) = \frac{(X^2-1)}{2}P''(X) + XP'(X) - P(X)$$

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose dans cette question que $n = 3$.
   (a) Déterminer la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Déterminer une base de $\ker f_3$ et une base de $\operatorname{Im} f_3$. Ces espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?
   (c) La matrice M_3 est-elle diagonalisable ?
3. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\langle f_n(P), Q\rangle = \langle P, f_n(Q)\rangle$. Qu'en déduit-on ?
4. On continue avec le produit scalaire de la question précédente. Si $k \in [\![0, n]\!]$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $p_k(P)$ la projection orthogonale de P sur $\mathbb{R}_k[X]$.
   Soit $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ la famille définie par : $T_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $T_k = X^k - p_{k-1}(X^k)$.
   (a) Montrer que $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, T_k est vecteur propre de f_n et préciser la valeur propre associée.

($\star$) Exercice 13 Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E, $\langle f(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que pour tous x et y de E, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
2. Montrer que $\ker f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.
3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f, alors $\lambda = 0$. f est-il diagonalisable ?
4. Montrer que la matrice de f dans toute base orthonormée de E est antisymétrique.
5. Soit u un automorphisme autoadjoint de E tel que $f \circ u = u \circ f$.
   (a) Montrer que $\forall x \in E$, $\langle f(x), u(x)\rangle = 0$.
   (b) En déduire que $f + u$ est un automorphisme de E.

($\star\star$) Exercice 14 Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$.
On dit qu'un endomorphisme φ est antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle \varphi(x), y\rangle = -\langle x, \varphi(y)\rangle$.
Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme φ de E antisymétrique.

1. Établir les propriétés suivantes :
   (a) Pour tout x de E, on a $\langle x, \varphi(x)\rangle = 0$.
   (b) $\operatorname{Im} \varphi = (\ker \varphi)^{\perp}$.
   (c) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par φ, alors $F^{\perp}$ est stable par φ.
   (d) $\ker \varphi = \ker(\varphi^2)$.
   (e) Le spectre de φ est soit vide soit réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que toutes les valeurs propres de φ^2 sont négatives ou nulles.
3. Soit :
   - F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geqslant 2$, p pair ;
   - α un réel strictement positif ;
   - u un endomorphisme antisymétrique de F tel que $u^2 = -\alpha^2 \operatorname{Id}_F$, où Id_F est l'endomorphisme identité de F.

   (a) On suppose que $p = 2$. Établir l'existence d'une base orthonormale de F dans laquelle la matrice A_α de u est donnée par $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

(b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p, montrer qu'il existe une base de F dans laquelle la matrice B_α de u est donnée par $B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & & \\ (0) & A_\alpha & & \vdots \\ & (0) & \ddots & (0) \\ & & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}$.

($\star$) Exercice 15 $E = \mathbb{R}^3$. On considère f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A (resp. B, C).

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de l'une des formes suivantes :

$$\pm I_3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \not\equiv 0[\pi]$$

2. Préciser si f correspond à : une rotation autour d'un axe (préciser lequel), une réflexion (préciser le plan invariant), ou la composée d'une rotation et d'une réflexion.

($\star$) Exercice 16 Déterminer les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

($\star$) Exercice 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $S = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ et α et β les plus petite et plus grande valeurs propres de S.

1. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$, montrer que $X^\top SX = X^\top AX$.
2. En déduire que $\alpha X^\top X \leqslant X^\top AX \leqslant \beta X^\top X$.
3. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [\alpha, \beta]$.

($\star\star$) Exercice 18 Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E. On note G la matrice de coefficients $g_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$.

1. Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, G est inversible.
3. Montrer que G est inversible si, et seulement si, la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

($\star\star\star$) Exercice 19 $E = \mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme A de E tel que

$$\text{pour tout } P \text{ de } E, \quad P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que A est de degré égal à n.

($\star$) Exercice 20 Montrer que toutes les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

($\star$) Exercice 21 Déterminer les isométries d'un espace euclidien qui sont aussi des endomorphismes autoadjoints.

($\star\star$) **Exercice 22** Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$$

($\star$) **Exercice 23** Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\ker(u^* \circ u) = \ker u$ et $\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}\, u^*$.

($\star\star\star$) **Exercice 24** Soient f et g des endomorphismes d'un espace euclidien E tels que $f^* \circ f = g^* \circ g$.

1. Montrer que $\ker f = \ker g$.
2. Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{O}(E)$ tel que $g = u \circ f$. Indication : considérer $(f(w_1), \ldots, f(w_r))$ une base orthonormée de $\mathrm{Im}\, f$ et montrer que $(g(w_1), \ldots, g(w_r))$ est une famille orthonormée de E.

($\star\star$) **Exercice 25** Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur d'un espace euclidien E.
Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, pour tout x de E, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Indication : considérer les vecteurs $x + ty$ avec $y \in \ker p$ et $x \in \mathrm{Im}\, p$.

($\star$) **Exercice 26** Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (r > 0 \text{ et } rt - s^2 > 0)$.

($\star\star$) **Exercice 27** Soient u et v des isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 1, et $t \in]0,1[$ tel que $(1-t)u + tv \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que $u = v$.

($\star\star$) **Exercice 28** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top M = I_n$. Montrer que M est inversible et symétrique, puis que $M = I_n$.

($\star\star\star$) **Exercice 29** Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On va montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

1. Montrer l'existence d'une telle matrice B.
2. Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Établir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$,

$$\ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = \ker(A - \lambda I_n)$$

3. Justifier l'unicité de B.

($\star\star$) **Exercice 30** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace euclidien. Montrer que $\|f^*\|_{\mathrm{op}} = \|f\|_{\mathrm{op}}$.

($\star$) **Exercice 31** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace euclidien. On suppose que $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$. Montrer que $\ker(f + f^*) = \ker f \cap \ker f^*$.

($\star$) **Exercice 32** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $\langle N_1, N_2 \rangle = \mathrm{Tr}({N_1}^\top N_2)$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'adjoint de $f : M \mapsto AM$.

($\star$) **Exercice 33** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace euclidien. Établir la liste de propriétés suivantes :

1. $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(f^*)$
2. $\det(f) = \det(f^*)$
3. $\chi_f = \chi_{f^*}$
4. $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(f^*)$
5. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\dim E_\lambda(f) = \dim E_\lambda(f^*)$.

Banque épreuve orale CCINP

Algèbre : 63, 66, 78.

Deux sujets de concours pour vous entraîner

($\star\star$) Exercice 34 (type CCINP)
Préliminaire : *(facultatif)* Montrer que $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note N la norme associée à ce produit scalaire. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de prouver que N est sous-multiplicative :

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B)$$

1. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$P^\top (A^\top A)P = D$$
où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.
On notera par la suite λ_i le coefficient $d_{i,i}$ de la matrice $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
2. Soit λ une valeur propre de $A^\top A$ et X un vecteur propre associé.
En calculant $X^\top A^\top AX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.
3. On pose $S = P^\top (BB^\top)P = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que
$$[N(A)]^2 = \mathrm{Tr}(D), \quad [N(B)]^2 = \mathrm{Tr}(S), \quad [N(AB)]^2 = \mathrm{Tr}(SD)$$
4. Montrer que : $\mathrm{Tr}(SD) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i}$.
5. On note E_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que :
$$E_i{}^\top SE_i = \|B^\top PE_i\|^2$$
où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer $E_i{}^\top SE_i$ en fonction des coefficients de S.
Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de $s_{i,i}$?
6. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} s_{i,i}\Big)$
puis conclure que : $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

($\star\star$) Exercice 35 (e3a 2024)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la matrice transposée de la matrice A.

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.
2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top BY$ pour un vecteur Y de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que l'on a : $A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n$.
4. En déduire que le polynôme $P(X) = \left(3X^2 - X - 1\right)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.
5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.
6. Factoriser P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
7. La matrice A est-elle inversible ?

8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.
9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Montrer que V est aussi vecteur propre de $A^\top$.
10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.
    On appelle $\mathscr{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associés à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2, \quad L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{(symbole de Kronecker).}$$

    (a) Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
    (b) Vérifier que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
    (c) Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base $\mathscr{L}$.
11. **Étude des puissances de A**
    (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
        i. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base $\mathscr{L}$.
        ii. En déduire une expression de A^k.
    (b) Démontrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.
    Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.
