

Produits scalaires, normes, orthogonalité

(**) Exercice 1

Soient a_1, a_2, \dots, a_{n+1} des réels distincts deux à deux et $E = \mathbf{R}_n[X]$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant : $\forall (P, Q) \in E^2, \varphi(P, Q) = \sum_{k=1}^{n+1} P(a_k)Q(a_k)$.

2. Pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$$

(a) Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, calculer $L_i(a_j)$.

(b) En déduire que $(L_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est une base orthonormée de E .

(*) Exercice 2 \mathbb{R}^4 est muni du produit scalaire canonique. Pour chacun des sous-espaces suivants, donner une base de F^\perp :

1. $F = \text{Vect}((1, 2, 0, 1), (0, 1, 2, 3))$
2. $F = \text{Vect}((3, 2, 0, 4), (1, 0, 0, -2), (1, -1, -1, 1))$
3. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y - z = 0\}$
4. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \text{ et } x + t = 0\}$

(*) Exercice 3 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le produit scalaire donné par :

$$\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

et les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}(1 + X, 1 - X^2)$ et $G = \text{Vect}(X - X^2)$.

Montrer que $G = F^\perp$ et que $F = G^\perp$.

(**) Exercice 4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E .

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
2. On suppose que $F \cap G^\perp = \{0\}$ et que $\dim F = \dim G$. Montrer que $F^\perp \cap G = \{0\}$.

(**) Exercice 5 Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme $\|\cdot\|$ associée, et x et y vecteurs de E . Montrer l'équivalence :

$$(x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux}) \iff (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x\| \leq \|x + \lambda y\|)$$

(*) Exercice 6 Soit E un espace euclidien et a un vecteur de norme 1. On considère :

$$f_\lambda : x \mapsto x + \lambda \langle a, x \rangle a$$

Montrer que f_λ est bijective si et seulement si $\lambda \neq -1$.

(*) Exercice 7 Soit E un espace vectoriel euclidien, et E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de E . Montrer :

$$E = E_1 \oplus E_2 \implies E = E_1^\perp \oplus E_2^\perp$$

Projetés orthogonaux

(★) **Exercice 8** $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. p_F désigne la projection orthogonale sur F .

1. Calculer $p_F(1, 1, 1)$ lorsque $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 3y - z = 0\}$.
 2. Calculer $p_F(x, y, z)$ lorsque $F = \text{Vect}(u)$, où $u = (-1, 3, 4)$.
-

(★) **Exercice 9** $F = \text{Vect}((1, -2, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 0, -1), (1, 1, 1))$.

1. Montrer que $F = G^\perp$.
On note p la projection orthogonale sur F et q la projection orthogonale sur G .
 2. Exprimer, pour $v \in \mathbb{R}^3$, $p(v)$ et $q(v)$.
-

(★★) **Exercice 10** On munit \mathbb{R}^4 de sa structure euclidienne canonique. On note H le sous-espace vectoriel engendré par u, v et w , où

$$u = (1, 1, 0, 1) \quad v = (1, 1, 1, 0) \quad w = (1, 1, -2, 1)$$

1. Déterminer la dimension de H et une base de H^\perp .
 2. On note p la projection orthogonale sur H (projection sur H parallèlement à H^\perp). Déterminer la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .
-

Inégalités

(★) **Exercice 11** Soient x et y des vecteurs d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice suivante est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle & \|y\|^2 \end{pmatrix}$$

(★) **Exercice 12** À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

(★★) **Exercice 13** Soient x, y, z réels vérifiant $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

(★) **Exercice 14** Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

(★) **Exercice 15**

1. (a) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

- (b) Application : montrer que si X est une variable aléatoire discrète finie à valeurs strictement positives, alors $E\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{E(X)}$.

2. (a) Montrer que pour f et g fonctions continues sur $[0, 1]$, on a :

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 [f(t)]^2 dt \right) \left(\int_0^1 [g(t)]^2 dt \right)$$

- (b) Application : soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0, 1]$. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \geq \frac{1}{\int_0^1 f(t) dt}$$

(★) **Exercice 16** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$.
2. Déterminer les vecteurs x de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ pour lesquels $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = n^2$.

(★★) **Exercice 17** Soit E l'ensemble des suites réelles telles que $\sum x_n^2$ converge.

1. Démontrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Démontrer qu'en posant, pour toute suite (x_n) et (y_n) de E , $\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$, on définit un produit scalaire sur E .
 E est-il un espace vectoriel euclidien (on ne demande pas de démonstration) ?
3. Montrer que pour (x_n) et (y_n) éléments de E , on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 \right)$$

(★) **Exercice 18** Pour x_1, x_2, \dots, x_n réels, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer l'inégalité :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

(★★) **Exercice 19** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et d'une norme $\| \cdot \|$.

1. Montrer que pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , on a : $\langle x | y \rangle \leq \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
2. Montrer, en développant la norme à l'aide du produit scalaire, que pour tous x_1, x_2, \dots, x_n vecteurs de E , on a :

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

(★) **Exercice 20** Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser la base (v_1, v_2, v_3) où :

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$$

(★) **Exercice 21** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour P et Q appartenant à E , on pose

$$\varphi(P, Q) = \int_0^\pi (\sin t) P(t) Q(t) dt$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, donner une base orthonormée de $F = \text{Vect}(1, X)$.

Divers

(**) **Exercice 22** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $[0, 1]$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

1. On considère l'application u définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad u(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que u est un endomorphisme de E . Que représente $u(f)$?

2. Déterminer un endomorphisme v de E qui vérifie :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle u(f), g \rangle = \langle f, v(g) \rangle$$

On pourra introduire une primitive bien choisie de la fonction g . Vérifier que v est unique.

3. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $u \circ v$ sont strictement positives.

(***) **Exercice 23** $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer par récurrence qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes deux à deux orthogonaux, avec P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
2. Montrer que pour $n \geq 2$, $P_{n+1} - XP_n$ est dans $(\mathbb{R}_{n-2}[X])^\perp$.
3. En déduire qu'il existe $(\lambda_n, \mu_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1} + \mu_n P_n$.

(**) **Exercice 24** Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)f(t) dt$$

où f est une fonction continue strictement positive sur $[a, b]$.

2. On note $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on dire de $\deg P_k$, pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$?
3. En considérant le produit scalaire $\langle XP_p, P_q \rangle$, montrer que XP_p appartient à $\text{Vect}(P_{p-1}, P_p, P_{p+1})$ pour tout entier naturel p non nul.
4. En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$a_n P_n(X) + (b_n + X)P_{n+1}(X) + c_n P_{n+2}(X) = 0$$

où les trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) sont des suites de réels.

(★) **Exercice 25** Soient E un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n vecteurs unitaires (c'est-à-dire de norme 1) telle que :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2 = \|x\|^2$$

1. Montrer que les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux.
 2. On note F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.
 - (a) Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
 - (b) Qu'en déduit-on pour F ?
 3. En déduire que la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E .
-

(★★) **Exercice 26** Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux, et E est le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.

On note B_c la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n , qui est orthonormée pour ce produit scalaire.

On note f l'endomorphisme de E tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

Soient n réels a_1, a_2, \dots, a_n ; on note $m = \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et on suppose dans cet exercice que $m > n$.

On note d l'endomorphisme de E tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d(e_i) = a_i e_i$.

Enfin, on note g l'endomorphisme $f + d$ de E .

1. (a) Montrer que $w = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ est un vecteur propre de f . À quelle valeur propre est-il associé?
- (b) Déterminer $\text{Im } f$ et en préciser une base orthonormée.
- (c) Prouver que $\ker f$ est le sous-espace vectoriel de E de base $B' = (e_2 - e_1, e_3 - e_1, \dots, e_n - e_1)$.
- (d) Justifier que $\text{Im } f = (\ker f)^\perp$.
- (e) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f , et que pour tout vecteur u de E , on a $\|f(u)\| \leq n\|u\|$.
2. (a) Justifier que d est un automorphisme de E .
- (b) Montrer que pour tout vecteur u de E , $\|d(u)\| \geq m\|u\|$ et que pour tout vecteur v de E , $\|d^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{m}\|v\|$.
- (c) Prouver que pour tout vecteur u non nul de E , on a $\|f(u)\| < \|d(u)\|$.
- (d) En déduire, en étudiant $\ker g$, que g est un automorphisme de E .

3. Soit v un vecteur fixé de E . Par 2.d., il existe un unique vecteur u de E tel que $g(u) = v$.
On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par

$$\begin{cases} u_0 &= v \\ u_{k+1} &= d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u_k) \text{ pour } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (a) Vérifier que $u = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u)$.
 - (b) Montrer que pour tout entier naturel k , $u_{k+1} - u = -(d^{-1} \circ f)(u_k - u)$.
 - (c) En déduire que pour tout entier naturel k , $\|u_{k+1} - u\| \leq \frac{n}{m}\|u_k - u\|$.
Montrer finalement que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - u\| = 0$.
-

(★) **Exercice 27** On considère un espace euclidien de dimension n , et des vecteurs v_1, \dots, v_n de norme 1 et vérifiant : pour $i \neq j$, $\|v_i - v_j\| = 1$.

1. Calculer $\langle v_i, v_j \rangle$.
2. Montrer alors que (v_1, \dots, v_n) est une base de E .

(★) **Exercice 28** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Démontrer que si u et v sont deux vecteurs de norme 1 de E , alors on a $\langle u + v, u - v \rangle = 0$.
2. Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme tel que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.
 - (a) Montrer que si u et v dans E sont de norme 1, alors $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.
 - (b) En déduire qu'il existe un réel $k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

(★) **Exercice 29** E est l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Pour g et f dans E , on pose :

$$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout $f \in E$,

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t) dt \right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)$$

(★) **Exercice 30**
 $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.
2. On pose

$$\begin{aligned} F &= \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \\ G &= \{g \in E, g'' = g\} \end{aligned}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux.

(★★) **Exercice 31** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\top B)$.

1. Établir que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$.
2. Démontrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On note $(m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ les coefficients d'une matrice M .

Montrer que pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\min_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ existe et vaut

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

(★★) **Exercice 32** Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - a - bx)^2 dx$.

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 39.

Algèbre : 76, 77, 79, 80, 81, 82, 92.

(★★) **Exercice 33** On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

1. Donner le degré et le coefficient dominant de P_n en fonction de n .
2. Justifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

3. Justifier la convergence de cette intégrale.
 4. Démontrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$.
 5. Calculer, pour n et m entiers naturels, $\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$.
 6. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.
-