Feuille d'exercices n° 16-bis **MP**
Probabilités **2025-2026**
Consolidation

($\star$) **Exercice 1** Une personne joue à Pile ou Face avec une pièce donnant Pile ou Face. Elle lance 5 fois la pièce.
On note F_k l'événement « il obtient Face au k^{e} lancer ». Exprimer à l'aide d'événements F_k :
A « à chaque lancer, il obtient un changement de résultat »
D « il obtient plus de Pile que de Face ».

($\star$) **Exercice 2**
On lance 11 fois une pièce. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle k-chaîne de Pile une suite de k lancers consécutifs, démarrant au début ou après un face, ayant tous donné Pile, cette suite devant être suivie d'un Face ou être la dernière suite du tirage. On note :
P_k : « on obtient Pile au k^{e} lancer »

1. Dans le cas où le résultat obtenu est P F F P P P P F P P P, donner le nombre et la longueur des chaînes.
2. Écrire en fonction d'événements de type P_k :
   A : « on a une 11-chaîne de Pile »
   B : « on a une 10-chaîne de Pile »
   C : « on a une 9-chaîne de Pile »
   D : « on a une 5-chaîne et une 4-chaîne de Pile, dans cet ordre d'apparition »

($\star$) **Exercice 3**
Un joueur joue à un jeu de fléchettes dans lequel :

— s'il atteint le centre de la cible, il gagne, et arrête le jeu ;
— s'il n'atteint pas la cible, il perd, et arrête le jeu ;
— s'il atteint la cible et rate le centre, il n'a ni gagné ni perdu ;
— d'un essai à l'autre, les résultats sont indépendants.

En un essai donné, la probabilité que le joueur atteigne le centre est $p \in]0,1[$, la probabilité qu'il n'atteigne pas la cible est $q \in]0,1[$, et la probabilité qu'il atteigne la cible mais pas le centre est $r \in]0,1[$, avec $p+q+r=1$.
On note :
G_k « au k^{e} essai, il atteint le centre »
N_k « au k^{e} essai, il atteint la cible mais pas le centre »
P_k « au k^{e} essai, il n'atteint pas la cible »

Il se donne au maximum 40 essais. Calculer :

1. la probabilité qu'il gagne son jeu (événement A) ;
2. la probabilité qu'il perde son jeu (événement B) ;
3. par deux méthodes, la probabilité qu'il n'ait ni gagné ni perdu son jeu (événement C).

($\star\star$) **Exercice 4**
Un jeu entre deux joueurs A et B est divisé en parties indépendantes. À chaque partie, celui qui perd donne un euro au gagnant. La probabilité que A gagne une partie est $p \in]0;1[$ et la probabilité que A perde une partie est $q = 1-p$. Les deux joueurs possèdent au total une somme de N euros. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs est ruiné, c'est-à-dire possède une somme nulle.

On note R_k l'événement « le joueur A, partant de la somme k, est ruiné par la suite » et $p_k = P(R_k)$.

1. Calculer p_0 et p_N. Montrer que $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$.
2. (a) Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, calculer p_k.

   (b) Dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $p_k = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$.
3. On suppose que A dispose d'une somme initiale $k \in \mathbb{N}^*$ et que B est infiniment riche *(vous pouvez prendre $N \to +\infty$ dans les résultats précédents)*. Donner les valeurs de p pour lesquelles A est presque-sûrement ruiné à la fin du jeu.

($\star$) Exercice 5 On dispose d'une urne qui contient au départ une boule blanche et une boule noire, et d'une pièce amenant Pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On lance la pièce. Si on obtient Pile, on tire une boule de l'urne et on s'arrête, sinon on ajoute une boule noire dans l'urne et on relance la pièce, et on réitère le processus.

1. Montrer que, presque-sûrement, on tire un jour une boule de l'urne.
2. Pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « on tire une boule de l'urne au n^{e} lancer de pièce » et B l'événement « on obtient la boule blanche ». Donner $P_{A_n}(B)$. Calculer $P(B)$ (si le chapitre Séries entières n'a pas été vu, on laissera le résultat sous forme de somme).

($\star\star\star$) Exercice 6

On lance une pièce donnant Pile avec probabilité $p \in]0;1[$ et Face avec probabilité $q = 1-p$, indéfiniment. Un joueur :

- gagne dès qu'il y a eu deux Pile de plus que de Face, et s'arrête alors de jouer ;
- perd dès qu'il y a eu deux Face de plus que de Pile, et s'arrête alors de jouer.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'événement E_n « la partie comporte au moins $2n$ lancers et il n'y a pas arrêt au $(2n)^{\text{e}}$ lancer ».
   Donner E_1 et sa probabilité.
   Pour $n \geqslant 2$, exprimer E_n en fonction de E_{n-1}. En déduire $P(E_n)$ en fonction de $P(E_{n-1})$. Donner alors la probabilité de l'événement E_n.
   En déduire la probabilité de l'événement A_n « la partie comporte au moins $2n$ lancers ».

2. Calculer la probabilité de l'événement B_n « le joueur gagne au $(2n)^{\text{e}}$ lancer ».

3. On considère B : « le joueur gagne » ; C : « le joueur perd » et D : « la partie dure indéfiniment ».

   (a) Calculer $P(B)$ (*réponse* $P(B) = \dfrac{p^2}{1-2pq}$). Sans autre calcul, donner $P(C)$.

   (b) Calculer $P(D)$ de deux façons différentes.
