**Feuille d'exercices n° 14** **MP**

**Topologie des espaces vectoriels normés** **2025-2026**

---

($\star$) **Exercice 1** Représenter les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et préciser si elles sont ouvertes, fermées, bornées.

1. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$
2. $E_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
3. $E_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 2\}$
4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \leqslant 1\}$
5. $E_5 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \; x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0\}$

---

($\star\star$) **Exercice 2** Soit $E$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme infinie. Notons $a = (a_n)$ la suite constante égale à 1 et $F$ le sous-espace vectoriel des suites convergeant vers 0. Montrer que la distance de $a$ à $F$ est égale à 1.

---

($\star$) **Exercice 3** Soit $E$ un espace vectoriel normé.

1. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que l'adhérence de $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. On suppose $E$ de dimension finie. Soit $H$ un hyperplan de $E$. Montrer que $\dim \overline{H} \in \{\dim E - 1, \dim E\}$. Trancher entre ces deux possibilités.

---

($\star\star$) **Exercice 4** Dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme donnée par $\|P\| = \sup\limits_{t \in [-1,1]} |P(t)|$, on considère $D : P \mapsto P'$. Montrer que l'application $D$ n'est pas continue sur $E$.

---

($\star\star$) **Exercice 5** Soit $E$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel non vide de $E$.

1. Montrer que si $F$ est ouvert, alors $F = E$.
2. Montrer que si $F$ n'est pas d'intérieur vide, alors $F = E$.

---

($\star\star$) **Exercice 6** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des fonctions continues s'annulant en 0 et en 1.

1. On munit $E$ de la norme : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Montrer que $\overline{F} = F$. Comment formuler autrement cette égalité ?
2. On munit $E$ de la norme : $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$. Montrer que $\overline{F} = E$. Comment formuler autrement cette égalité ?

---

($\star\star\star$) **Exercice 7** Déterminer la frontière de $\mathbb{Q}$.

---

($\star$) **Exercice 8** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1 + \|x\|}$ est $k$-lipschitzienne pour une valeur de $k$ que l'on précisera. Qu'en déduit-on ?

---

($\star$) **Exercice 9** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$ est bijective de $E$ dans $\mathcal{B}(0,1)$. Montrer que $f$ et $f^{-1}$ sont continues.

---

($\star$) **Exercice 10** Montrer de deux façons que $T : M \mapsto M^\top$ est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

---

($\star\star$) **Exercice 11** Montrer la continuité sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de l'application qui à une matrice associe son inverse. On utilisera la formule de l'inverse par la comatrice.

---

($\star$) **Exercice 12** Soit $T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $T(P) = P'$. Étudier la continuité de $T$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}[X]$ des normes :

1. $N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$
2. $N_2(P) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |P(t)|$

---

($\star$) **Exercice 13** On munit $E = \mathcal{B}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ de la norme infinie (ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, muni de $\|.\|_\infty$). Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Montrer que la forme linéaire définie sur $E$ par

$$u(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)}{2^n}$$

est continue et déterminer sa norme subordonnée.

---

($\star$) **Exercice 14** Soit $E = \mathbb{K}[X]$ muni de la norme donnée par $\|P\| = \sup\limits_{t\in[-1,1]} |P(t)|$. On considère $u : P \mapsto P(\frac{X}{2})$. Montrer que $u$ est continue sur $E$ et calculer $|||u|||$.

---

($\star$) **Exercice 15** Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ muni de la norme uniforme. On considère $\varphi : f \in E \mapsto \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\varphi$ est continue sur $E$ et calculer $|||\varphi|||$. On pourra considérer les fonctions $f_n : t \mapsto 1 - t^n$.

---

($\star\star$) **Exercice 16** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme infinie. Montrer que $|||A||| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
2. On suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme 1. Montrer que $|||A||| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.
3. *(uniquement pour les 5/2 ou en fin d'année)* On suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme 2. Montrer que $|||A||| = \sqrt{\max(\mathrm{Sp}(A^\top A))}$.

---

($\star$) **Exercice 17** Montrer qu'une application linéaire $u : E \to F$ est continue si, et seulement si, sa restriction à la sphère unité est bornée.

---

($\star\star$) **Exercice 18**

1. Montrer que $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A$ inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
3. En déduire que pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

---

($\star\star$) **Exercice 19** On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables.

1. Montrer que $\varphi : M \mapsto (\mathrm{Tr}(M))^2 - 4\det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est trigonalisable si et seulement si $\varphi(M) \geqslant 0$.
3. En déduire que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

---

**($\star\star\star$) Exercice 20** Soit $E$ un espace vectoriel normé et $\varphi$ une forme linéaire sur $E$.

1. Montrer que si $\varphi$ est continue, alors $\ker \varphi$ est fermé.
2. Réciproquement, on suppose que $\ker \varphi$ est fermé. On raisonne par l'absurde en supposant que $\varphi$ n'est pas continue. En utilisant la négation du critère de continuité d'une application linéaire, aboutir à une contradiction. Conclure.

---

**($\star$) Exercice 21** Soit $f$ une application définie sur une partie $A$ non vide d'un espace vectoriel normé $E$, à valeurs dans un espace normé.

1. Montrer que $f$ est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites $(a_n)$ et $(b_n)$ d'éléments de $A$ telles que $\|a_n - b_n\| \to 0$, on a $\|f(a_n) - f(b_n)\| \to 0$.
2. En déduire que la fonction logarithme n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

---

**($\star\star$) Exercice 22** Soit $E$ un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^+ \to E$ une fonction continue admettant une limite $\ell$ en $+\infty$. Montrer que $f$ est uniformément continue.

---

**($\star$) Exercice 23** Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que la sphère unité, $S = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$, est une partie compacte.

---

**($\star$) Exercice 24** Soit $K$ une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé et $x \in E$. On rappelle que $d(x, K) = \inf\limits_{y \in K} \|y - x\|$. Montrer qu'il existe $y_0 \in K$ tel que $d(x, K) = \|y_0 - x\|$.

---

**($\star\star$) Exercice 25** Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\}$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

**($\star\star\star$) Exercice 26** Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2} u_{2n} \to 0$. Montrer que la suite $u$ converge, en utilisant un argument de compacité.

---

**($\star$) Exercice 27** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $f$ admet un minimum.

---

**($\star\star$) Exercice 28** Soient $K$ et $L$ deux compacts d'un espace vectoriel normé.

1. Que nous dit le cours au sujet de $K \times L$ ?
2. Montrer que si $K$ et $L$ sont disjoints, alors $\inf\limits_{(x,y) \in K \times L} \|x - y\| > 0$.

---

**($\star\star$) Exercice 29** Parmi les ensembles suivants, lesquels sont compacts ?

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y^2 = 1\}$
2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\}$
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x(1 - 2x)\}$

---

**($\star\star\star$) Exercice 30** Soit $K$ un compact non vide d'un espace vectoriel normé $E$. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \qquad (\star)$$

1. En considérant $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$, montrer que $f$ admet un unique point fixe, noté $\alpha$.
2. Soit $x \in K$. On considère la suite donnée par $u_0 = x$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)$ admet une unique valeur d'adhérence, égale à $\alpha$. Qu'en déduit-on ?

**($\star\star\star$) Exercice 31** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la suite $(A^k)$ soit bornée. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_p = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.

1. Montrer que la suite $(B_p)$ possède au moins une valeur d'adhérence $B$.
2. Montrer que $B(I_n - A) = 0_n$.
3. Montrer que $B$ est une matrice de projection, et que c'est la projection sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$.
4. Conclure que la suite $(B_p)$ converge vers $B$.

---

**($\star\star$) Exercice 32** Montrer que les fonctions suivantes $S$ sont continues sur $D$.

1. $S(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x^2)(n+y^2)}$ et $D = \mathbb{R}^2$.
2. $S(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(ny)}{1+n^2x}$ et $D = \{(x,y),\ x > 0\}$.

---

**($\star\star$) Exercice 33** Étudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions $f$ suivantes, données par $f(0,0) = 0$ et

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^4+y^8}$
4. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^8}$

---

**($\star\star$) Exercice 34** Les fonctions suivantes ont-elles une limite à l'origine ?

1. $f(x,y) = \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2. $g(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
3. $j(x,y) = \dfrac{x^2y+yz^2}{x^2+2y^2+3z^2}$
4. $h(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin(x), \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$
5. $k(x,y,z) = \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

---

**($\star$) Exercice 35** On considère $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{e^{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout réel $a$, il existe $R > 0$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B_f(0,R), \quad g(x,y) > a$.
2. Montrer que $g$ possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

---

**($\star$) Exercice 36** Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique (cercle de centre $O$ et rayon 1) dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C}$ est connexe par arcs :

1. par un schéma,
2. par des calculs.

---

**($\star\star\star$) Exercice 37** Nous allons montrer que les sphères d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $E$ de dimension supérieure ou égale à 2 sont connexes par arcs.

1. Soit $S$ la sphère unité de $E$ et soient $a$ et $b$ dans $S$, avec $a \neq b$.
   (a) Dans le cas où $a \neq -b$, en considérant $\gamma(t) = \dfrac{(1-t)a+tb}{\|(1-t)a+tb\|}$, montrer qu'il existe un chemin continu reliant $a$ à $b$ dans $S$.
   (b) Traiter le cas où $a = -b$ en utilisant le résultat de la question précédente.
   On en déduit que $S$ est connexe par arcs.
2. En déduire que toutes les sphères de $E$ sont connexes par arcs.

---

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 1, 13, 17, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 44, 45, 54, 58 bis.

---