
($\star$) Exercice 1 Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$ et donner sa somme.

($\star\star$) Exercice 2 Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum(\frac{\sin n}{n})\, z^n$
2. $\sum(\tan\frac{n\pi}{7})\, z^n$
3. $\sum d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs positifs de n
4. $\sum a_n z^n$ où a_n est la n-ième décimale de π.

($\star\star$) Exercice 3 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum z^{n^2}$
2. $\sum 2^n z^{2^n}$
3. $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

($\star$) Exercice 4 Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\cos(\frac{n\pi}{2})x^n$.

($\star$) à ($\star\star\star$) Exercice 5 Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme pour

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} nx^n$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2nx^{2n}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2n^{(-1)^n}x^{2n}$

($\star\star$) Exercice 6 Déterminer le rayon de convergence, et calculer la somme, pour $\sum \frac{n^2-4n-1}{n+2}x^n$.

($\star\star\star$) Exercice 7 Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^n}{2n+1}$. Exprimer à l'aide de fonctions usuelles $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ pour $x \in]-R, R[$:

— dans le cas où $x < 0$, on fera apparaître un développement en série du cours,
— dans le cas où $x > 0$, on s'aidera de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^{2n}$.

($\star$) Exercice 8 Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n}z^n$ et $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$.

($\star$) Exercice 9 Calculer les dérivées n-ième en 0 de $f : x \mapsto e^{x^2}$.

($\star$) Exercice 10 Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \frac{e^x-1-x}{x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{x^2}{e^x-1-x}$ sont prolongeables en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

($\star\star$) Exercice 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.
2. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.

($\star\star$) Exercice 12 Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ |f^{(n)}(x)| \leqslant MK^n n!$$

avec $M \geqslant 0$, $K > 0$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

($\star\star$) Exercice 13 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme S. On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0,1[$.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
2. Montrer que la fonction S est définie et continue sur $[-1,1]$.

($\star\star$) Exercice 14

1. Rappeler le développement en série entière de Arctan sur $]-1,1[$. Comment retrouve-t-on ce résultat ?
2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$. Donner son rayon de convergence R et calculer sa somme $f(x)$. On exprimera $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
3. Que peut-on dire de la convergence sur $[-R,R]$?
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

($\star$) Exercice 15 Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$
2. $\dfrac{1}{a-x}$ si $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ où $a > 0$
4. $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$
6. $(4+x^2)^{-3/2}$

($\star\star$) Exercice 16 Développer en série entière $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence obtenu.

($\star$) Exercice 17 Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.
2. Préciser l'intervalle de définition de f.
3. Établir la continuité de f sur son domaine de définition.
4. Déterminer la limite de f en 1.

($\star\star\star$) Exercice 18 À l'aide d'un développement en série entière de f', déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.

($\star\star$) Exercice 19 Donner les développements en série entière au voisinage de 0 des fonctions rationnelles qui suivent :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-1)^2}$
2. $g(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$

($\star$) **Exercice 20** À l'aide d'un développement en série entière, justifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer ses dérivées successives en 0.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

($\star\star\star$) **Exercice 21** Soit $f(x)$ la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.
2. Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

($\star\star$) **Exercice 22** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$ et calculer sa somme.

($\star\star$) **Exercice 23** Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) f(x)$$

2. Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que g n'est pas développable en série entière.

($\star\star\star$) **Exercice 24**

Calculer, pour $x \in]-1,1[$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

($\star\star$) **Exercice 25** Soit $f(x) = \mathrm{sh}(\arcsin(x))$.

1. Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 2 satisfaite par f et rappeler les conditions initiales.
2. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0, et déterminer ce développement.

($\star$) **Exercice 26** Sans utiliser le chapitre Equations différentielles, rechercher une solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$.

($\star\star$) **Exercice 27** À l'aide d'une équation différentielle, développer en série entière $f : x \mapsto e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Préciser le rayon de convergence.

($\star$) **Exercice 28** Montrer qu'il existe une unique série entière de rayon de convergence $+\infty$ dont la somme f vérifie :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad xf''(x) + f'(x) + f(x) = 0$$

($\star\star$) **Exercice 29**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ et $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. Déterminer une équation différentielle du premier ordre avec second membre vérifiée par f sur son intervalle ouvert de convergence. Pour cela, on commencera par établir la relation de récurrence entre a_n et a_{n-1} : $2(2n-1)a_n = na_{n-1}$.

(⋆⋆) Exercice 30 Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence par $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence R strictement positif et on note $f(x)$ sa somme. Montrer qu'au voisinage de 0, on a :
$$xf(x)^2 = f(x) - 1 \quad \text{puis} \quad f(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$$
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$ prolongée par continuité en 0 est développable en série entière au voisinage en 0. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

(⋆⋆) Exercice 31 Établir l'identité
$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(⋆⋆) Exercice 32 Soit α réel et $f : x \mapsto \cos(2\alpha \arcsin x)$ sur $[-1, 1]$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.
2. En déduire le développement en série entière de f sur $]-1, 1[$.

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 2, 15 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 47, 51.

Entraînement aux problèmes CCINP – ancien sujet

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On rappelle le théorème suivant :
Si une fonction admet un développement en série entière sur l'intervalle $I =]-r, r[$ $(r > 0)$alors :

— la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$,

— son développement en série entière est unique et donné par la série de Taylor de f à l'origine :
$$\text{pour tout réel } x \in]-a, a[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(0) = 1 \text{ et pour } x \neq 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Expliciter une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $f^{(n)}(0) = n.n!$
3. Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

On suppose que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   (a) Montrer que la série $\sum f(x) \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) À l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$, montrer que f est la fonction nulle sur $[0, 1]$.

   (c) Montrer que f est la fonction nulle sur $]-R, R[$.

II. Contre-exemples

4. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.
5. **Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0.**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x \neq 0,\ f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ et } f(0) = 0$$

   (a) Par les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-\frac{1}{x^2})$$

   (b) Démontrer alors, toujours par récurrence, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
   Par parité, f est ainsi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

6. **Un exemple où la série de Taylor de f en 0 a un rayon nul.**
On pose, pour x réel,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + tx^2}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que, pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   (b) *Question pour les 5/2 uniquement.* Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   On admet que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient ses dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

   (c) Pour $t \in]0, +\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

   (d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$? La fonction f est-elle développable en série entière à l'origine ?

III. Condition suffisante

On se propose, dans cette partie, d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

7. Soit $a > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a, a[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout réel $x \in]-a, a[$ et pour tout entier naturel n, $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$.
   (a) Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0.
   (b) Donner un exemple simple de fonction, autre qu'une fonction constante, pour laquelle ce résultat s'applique.
