Feuille d'exercices n^o 11 **MP**
Calcul différentiel **2025-2026**

($\star$) **Exercice 1** *(5/2 uniquement)* Donner le domaine de définition de f, g et h ; représenter ces domaines et préciser, sans démonstration, si ce sont des ensembles ouverts, fermés, bornés :

$$f(x,y) = \frac{1}{y^2 - x^2} \quad g(x,y) = \ln(1 - xy) \quad h(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

($\star$) **Exercice 2** *(5/2 uniquement)* Donner et représenter les domaines de définition de f et g données par :

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y) + \sqrt{1 + y - x^2} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \ln(\sqrt{x} - y - 3)$$

($\star$) **Exercice 3** *(5/2 uniquement)* Représenter les ensembles suivants et indiquer pour chacun, sans démonstration, s'il s'agit d'un ensemble ouvert, fermé, borné.

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant 2x - 4y \leqslant 5\}$$

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 2\}$$

$$D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < |x - 4| < 6\}$$

$$D_5 = [0,1] \times [0,2]$$

($\star$) **Exercice 4** $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3xy + x - 4y - 1$ et $a = (1,0)$ et $u = (-1,1)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice hessienne de f en a.
2. Donner l'équation du plan tangent au graphe de f en a.
3. Calculer la dérivée première directionnelle de f en a suivant la direction u.

($\star$) **Exercice 5** Soit $U =]1, +\infty[\times]0, \frac{1}{2}[$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy(1-2y)^{x-1}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
2. Montrer que pour tout $t \in]0,1[\quad \ln(1-t) < -t$.
3. En déduire que f n'admet pas d'extremum sur U.

($\star$) **Exercice 6** Donner la matrice hessienne en (x,y) de $f : (x,y) \mapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$. Même question pour $g : (x,y) \mapsto e^{xy}$.

($\star\star$) **Exercice 7** Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice hessienne de :

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xBx^\top \end{array} \right)$$

($\star$) **Exercice 8** $f(x,y) = \cos(x+y) + ye^x$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Donner le gradient et la matrice hessienne de f en (x,y).
3. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$.

(⋆⋆) Exercice 9

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$$

1. Vérifier que $f(x)=\frac{1}{2}\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.
2. Donner le gradient et la Hessienne de f en x.

(⋆⋆) Exercice 10 Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $(x,y)\neq 0$, on pose $f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

1. Par quelle valeur peut-on prolonger f par continuité en 0 ? On note encore f la fonction définie par ce prolongement.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(x,y)\neq(0,0)$.
3. Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

(⋆) Exercice 11 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de f.

1. $g(x,y)=f(y,x)$
2. $g(x)=f(x,x)$
3. $g(x,y)=f(y,f(x,x))$
4. $g(x)=f(x,f(x,x))$

(⋆⋆) Exercice 12 On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que la fonction suivante est différentiable en tout point et donner sa différentielle.

$$f:\begin{pmatrix}\mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & \frac{1}{z}\end{pmatrix}$$

(⋆) Exercice 13 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, de variables x et y. On définit :

$$g(u,v)=f(uv,u^2+v^2)$$

1. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f.
2. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de g en fonction des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de f.

(⋆⋆) Exercice 14 Soit $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M)=M^3$. Justifier que f est différentiable et calculer sa différentielle en $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(☕) Exercice 15 On étudie $f:M\mapsto M^{-1}$ définie sur l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. En exploitant l'identité $(I_n+H)(I_n-H)=I_n-H^2$, établir que l'application f est différentiable en I_n.
2. En déduire que f est différentiable en toute matrice $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et exprimer sa différentielle.
3. Retrouver ce résultat en différentiant à partir de l'égalité $M\times M^{-1}=I_n$.

(⋆) Exercice 16 *(5/2 uniquement)* Pour f endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien et $u\in E$, montrer que $\varphi:x\mapsto\frac{1}{2}\langle f(x),x\rangle+\langle u,x\rangle$ est différentiable en tout point a et donner sa différentielle en a, ainsi que son gradient en a.

(⋆) Exercice 17 Soit $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^3+3xy+z=0\}$ et $u=(0,-1,1)$. Déterminer l'ensemble des points de X en lesquels le vecteur u est tangent à X.

($\star\star\star$) Exercice 18 *(5/2 uniquement)*

1. Montrer que si A est une matrice antisymétrique d'ordre n à coefficients réels, alors pour tout réel t, $e^{tA} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ au point I_n.

($\star$) Exercice 19 *(5/2 uniquement)* Montrer que $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

($\star\star$) Exercice 20 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Pour cela, on préconise d'effectuer le changement de variables $\begin{cases} u &= x+y \\ v &= 2x+3y \end{cases}$.

($\star\star\star$) Exercice 21 Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

Pour cela, on effectuera le changement de variables $\begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \end{cases}$.

($\star\star\star$) Exercice 22 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (cette quantité s'appelle le laplacien de f). Donner une expression du laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire donner Δf en fonction de dérivées partielles de $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On commencera par calculer $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

($\star\star\star$) Exercice 23 *(5/2 uniquement)* Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $A(s)$ et $A(t)$ commutent.

1. Justifier que $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M)$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
2. Soit $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(A(t))$. En remarquant que $\Phi(t) = \exp(A(t) - A(t_0))\exp(A(t_0))$, montrer que

$$\Phi'(t_0) = A'(t_0)\exp(A(t_0))$$

($\star\star$) Exercice 24 Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. Déterminer les solutions constantes de $(*)$.
2. Soit f une solution non identiquement nulle de $(*)$. Montrer que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, et que f est une fonction paire.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad F(x,y) = f(x+y) + f(x-y)$$

   Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles secondes de F.
   On suppose que f est une solution non identiquement nulle de $(*)$. Des expressions de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme $z'' - \alpha z = 0$.
   Donner les solutions de l'équation différentielle $z'' - \alpha z = 0$ suivant les valeurs de α.

4. Déterminer toutes les solutions de $(*)$.

($\star\star$) Exercice 25 (oral CCINP 2024)

Soit $h : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3 - y^2 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble $\{(x,y) / \, h(x,y) = 0\}$.

1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de h. h admet-elle un extremum en $(0,0)$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x,y) = 0$ pour (x,y) dans $\mathcal{C}$.
   (a) Justifier que pour tout réel t, $f(t^2, t^3) = 0$.
   (b) En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
3. Soit $\varphi_t : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & f(t^2, u) \end{pmatrix}$.
   Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in] - t^3, t^3[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$.
4. Conclure que $(0,0)$ est un point critique de f.
5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble $\mathcal{C}$.

($\star\star$) Exercice 26

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $\Phi : \begin{pmatrix} E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) & \to & F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x} - af \end{pmatrix}$. On admet que Φ est une application linéaire.

1. Soit $A \in F$. Calculer $\Phi(g)$ pour $g(x,y) = e^{ax} \int\limits_0^x A(t,y) e^{-at} \, \mathrm{d}t$.
2. Déterminer $\ker \Phi$.
3. Résoudre alors (E) : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - af(x,y) = 2x - 3y$.

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 33, 52, 57, 58.
