

(★) **Exercice 1** – Différentes méthodes de calculs de puissances de matrice

1. *Formule du binôme*

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . À l'aide de la formule du binôme, déterminer  $A^n$  pour  $n \geq 1$ .

2. *Utilisation d'une division euclidienne par un polynôme annulateur*

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . On admet, ce qui se démontre par calcul matriciel, que  $A^2 - 3A + 2I = 0$ .

(a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$  est  $(2^n - 1)X - (2^n - 2)$ .

(b) En déduire une expression de  $A^n$  en fonction de  $A$  et  $I$ .

3. *Utilisation de la diagonalisation*

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Diagonaliser  $A$  et en déduire  $A^n$  pour  $n$  entier naturel.

(★) **Exercice 2**

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admettant  $n$  valeurs propres.

Montrer que la famille  $(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$  est libre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(★★) **Exercice 3**

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. (a) Soient  $A$  et  $Q$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $Q$  est inversible. Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels. Expliciter  $P(Q^{-1}AQ)$  en fonction de  $P(A)$ ,  $Q$  et  $Q^{-1}$ .

(b) Soit  $D$  une matrice diagonale de coefficients diagonaux  $d_1, \dots, d_n$ . Expliciter  $P(D)$ .

2. (a) Soient  $x_1, \dots, x_n$  des réels deux à deux distincts et  $\varphi$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  associe le  $n$ -uplet  $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$ . Montrer que l'application  $\varphi$  est bijective.

(b) Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   $n$  réels distincts non nuls et  $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire telle que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $t_{i,i} = \lambda_i$ .

Établir l'existence d'un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on ait  $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$ .

Que vaut  $T \times P(T)$ ? Qu'en déduit-on?

3. Déterminer un polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , l'inverse de la matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  soit égal à  $P(A)$ .

(★) **Exercice 4** Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. (a) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

(b) En déduire une matrice  $P$  inversible et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

2. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$ . On pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n = P^{-1}X_n$$

- Quelle relation a-t-on entre  $X_{n+1}$ ,  $X_n$  et  $A$ ?
- En déduire l'expression de  $Y_n$  en fonction de  $n$ ,  $D$  et  $Y_0$ .
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $x_0$ ,  $x_1$  et  $x_2$  pour que la suite  $(x_n)$  soit convergente.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $x_0$ ,  $x_1$  et  $x_2$  pour que la série  $\sum x_n$  soit convergente.

(\*\*) **Exercice 5** Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels non nuls vérifiant  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . On pose  $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $M = UU^\top$ .

- Déterminer un polynôme annulateur de  $M$ . Qu'en déduit-on?
- Donner les espaces propres de  $M$ .

(\*) **Exercice 6** Déterminer le polynôme minimal de  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(\*\*) **Exercice 7** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 3. On suppose que  $-1$  et  $1$  sont valeurs propres de  $f$  et que  $f^4 = f^2$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.

(\*\*) **Exercice 8** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $M^2 - I_n = M^\top$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable.

(\*\*\*) **Exercice 9**

- Déterminer toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant :  $M^n = I_n$  et  $\text{Tr}(M) = n$ .
- Déterminer toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant :  $M(M - I_n)^3 = 0_n$  et  $\text{Tr}(M) = 0$ .

(\*\*) **Exercice 10** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension  $n \geq 1$ . On suppose que  $f$  possède 1 pour seule valeur propre. Montrer que l'endomorphisme  $f - \text{Id}_E$  est nilpotent.

(\*) **Exercice 11** Soit  $A \in \text{GL}_6(\mathbb{R})$  vérifiant  $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ .

- Montrer que  $A$  est diagonalisable.
- On suppose de plus que  $\text{Tr}(A) = 8$ . Déterminer  $\chi_A$  puis  $\pi_A$ .

(\*\*) **Exercice 12** Le polynôme  $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$  peut-il être le polynôme minimal d'une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ ?

(\*\*) **Exercice 13** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  défini par  $\Phi : M \mapsto AM$ .

- Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P(\Phi)(M) = P(A)M$ .
- En déduire que  $\Phi$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable.

(\*\*) **Exercice 14** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  admettant un polynôme annulateur  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(0) = 0$  et  $P'(0) \neq 0$ .

1. Montrer que  $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$ .
2. Montrer que  $\operatorname{Im} f$  est le noyau d'un polynôme en  $f$ .
3. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $A$  inversible.
4. On enlève l'hypothèse de dimension finie de  $E$ . Montrer que  $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$ .

(★★) **Exercice 15** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes diagonalisables et qui commutent. Montrer qu'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres communs à  $u$  et  $v$ .

(★★) **Exercice 16** Soit  $P = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$ . Montrer que le polynôme minimal de  $A$  est  $P$ .

(★★) **Exercice 17** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $A(A^2 + A + I_n) = 0$ . Montrer que le rang de  $A$  est pair et que sa trace est un entier.

(★★) **Exercice 18** Soit  $u$  un endomorphisme bijectif d'un espace de dimension finie  $n \geq 1$ . Montrer que  $u^{-1}$  est un polynôme en  $u$ . Indication : on utilisera le théorème de Cayley-Hamilton.

(★★) **Exercice 19** Calculer l'exponentielle de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  par diagonalisation et d'une autre façon, de votre choix.

(★★) **Exercice 20** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$  matrice par blocs de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ .

1. Diagonaliser  $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ . On demande  $P$ ,  $D$  et  $P^{-1}$ .
2. Montrer alors que  $B$  est semblable à  $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ .
3. En déduire que si  $A$  est diagonalisable,  $B$  l'est aussi.
4. Pour  $Q$  polynôme, exprimer  $Q(C)$  sous forme de matrice diagonale par blocs. Montrer que si  $B$  est diagonalisable, alors  $A$  l'est aussi.

(★★) **Exercice 21** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de  $A$ .
2. Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
3. (après le chapitre Séries vectorielles) Calculer  $\exp(B)$ .

(★★) **Exercice 22** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de projecteur et  $F \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  donné par

$$F(M) = \frac{1}{2}(AM + MA)$$

1. Donner un polynôme annulateur de  $F$ .
2. Montrer que  $F$  est diagonalisable.

(\*\*\* **Exercice 23** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose que le polynôme  $P = X^2 + X + 1$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\text{Vect}(x, u(x))$  est un plan vectoriel.
2. Soit  $F$  un sous-espace stable par  $u$  et  $x \notin F$ . Montrer que le plan vectoriel  $\text{Vect}(x, u(x))$  est stable par  $u$  et est en somme directe avec  $F$ .
3. Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs de blocs diagonaux  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et qu'en particulier,  $n$  est pair.

(\*) **Exercice 24** (oral CCINP, PC)

Soit  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Justifier que  $A$  est diagonalisable. Donner  $\text{rg}(A - I_3)$ . Donner les valeurs propres de  $A$ .
2. Donner les sous-espaces propres de  $A$ .
3. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  de matrice  $A$  dans une base  $\mathcal{B}$ . Quelle est l'action réalisée par  $u$ ?

(\*) **Exercice 25** (oral Mines-Télécom, PC)

Soit  $A$  une matrice réelle carrée d'ordre  $n$  qui vérifie  $A^2 + 3A + 3I_n = 0$ .

1. Montrer que  $A$  ne possède pas de valeur propre réelle.
2. Montrer que  $n$  est nécessairement pair.
3. Calculer  $\text{Tr } A$  et  $\det A$ .

(\*) **Exercice 26** (extrait oral Mines-Télécom, PC)

Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Trouver un polynôme annulateur de  $M$ .
2. Montrer que  $M$  est diagonalisable.
3. Déterminer les valeurs propres de  $M$  sans calculs (avec le moins de calculs possible).

(\*) **Exercice 27** (oral Mines-Télécom, PC)

1. Les matrices suivantes sont-elles semblables?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Donner un polynôme annulateur de  $B$ . En déduire la diagonalisabilité de  $B$ .

Banque épreuve orale CCINP