

(*) Exercice 1 – Différentes méthodes de calculs de puissances de matrice

1. Formule du binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. À l'aide de la formule du binôme, déterminer A^n pour $n \geq 1$.

2. Utilisation d'une division euclidienne par un polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On admet, ce qui se démontre par calcul matriciel, que $A^2 - 3A + 2I = 0$.

- (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est $(2^n - 1)X - (2^n - 2)$.
- (b) En déduire une expression de A^n en fonction de A et I .

3. Utilisation de la diagonalisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et en déduire A^n pour n entier naturel.

(*) Exercice 2

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres.

Montrer que la famille $(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(**) Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. (a) Soient A et Q deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que Q est inversible. Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P(Q^{-1}AQ)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1} .
(b) Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux d_1, \dots, d_n . Expliciter $P(D)$.
2. (a) Soient x_1, \dots, x_n des réels deux à deux distincts et φ l'application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R}^n qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le n -uplet $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$.
Montrer que l'application φ est bijective.
(b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$.
Que vaut $T \times P(T)$? Qu'en déduit-on?

3. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égal à $P(A)$.

(*) Exercice 4 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer le polynôme caractéristique de A .
(b) En déduire une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$. On pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n = P^{-1}X_n$$

- (a) Quelle relation a-t-on entre X_{n+1} , X_n et A ?
 - (b) En déduire l'expression de Y_n en fonction de n , D et Y_0 .
 - (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0 , x_1 et x_2 pour que la suite (x_n) soit convergente.
 - (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0 , x_1 et x_2 pour que la série $\sum x_n$ soit convergente.
-

(**) **Exercice 5** Soit a , b et c des réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $M = UU^\top$.

- 1. Déterminer un polynôme annulateur de M . Qu'en déduit-on ?
 - 2. Donner les espaces propres de M .
-

(*) **Exercice 6** Déterminer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(**) **Exercice 7** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 3. On suppose que -1 et 1 sont valeurs propres de f et que $f^4 = f^2$. Montrer que f est diagonalisable.

(**) **Exercice 8** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - I_n = M^\top$. Montrer que M est diagonalisable.

(***) **Exercice 9**

- 1. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $M^n = I_n$ et $\text{Tr}(M) = n$.
 - 2. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $M(M - I_n)^3 = 0_n$ et $\text{Tr}(M) = 0$.
-

(**) **Exercice 10** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension $n \geq 1$. On suppose que f possède 1 pour seule valeur propre. Montrer que l'endomorphisme $f - \text{Id}_E$ est nilpotent.

(*) **Exercice 11** Soit $A \in \text{GL}_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

- 1. Montrer que A est diagonalisable.
 - 2. On suppose de plus que $\text{Tr}(A) = 8$. Déterminer χ_A puis π_A .
-

(**) **Exercice 12** Le polynôme $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice M de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$?

(**) **Exercice 13** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ défini par $\Phi : M \mapsto AM$.

- 1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\Phi)(M) = P(A)M$.
 - 2. En déduire que Φ est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.
-

(**) **Exercice 14** Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\ker f \oplus \text{Im } f = E$.
 2. Montrer que $\text{Im } f$ est le noyau d'un polynôme en f .
 3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A inversible.
 4. On enlève l'hypothèse de dimension finie de E . Montrer que $\ker f \oplus \text{Im } f = E$.
-

(★★★) **Exercice 15** Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables et qui commutent. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v .

(★★★) **Exercice 16** Soit $P = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$. Montrer que le polynôme minimal de A est P .

(★★) **Exercice 17** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A(A^2 + A + I_n) = 0$. Montrer que le rang de A est pair et que sa trace est un entier.

(★★) **Exercice 18** Soit u un endomorphisme bijectif d'un espace de dimension finie $n \geq 1$. Montrer que u^{-1} est un polynôme en u . Indication : on utilisera le théorème de Cayley-Hamilton.

(★★) **Exercice 19** Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ par diagonalisation et d'une autre façon, de votre choix.

(★★★) **Exercice 20** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ matrice par blocs de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Diagonaliser $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. On demande P, D et P^{-1} .

2. Montrer alors que B est semblable à $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.

3. En déduire que si A est diagonalisable, B l'est aussi.

4. Pour Q polynôme, exprimer $Q(C)$ sous forme de matrice diagonale par blocs. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.

(★★) **Exercice 21** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A .

2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. (*après le chapitre Séries vectorielles*) Calculer $\exp(B)$.

(★★) **Exercice 22** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projecteur et $F \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donné par

$$F(M) = \frac{1}{2}(AM + MA)$$

1. Donner un polynôme annulateur de F .
 2. Montrer que F est diagonalisable.
-

(★★) **Exercice 23** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que le polynôme $P = X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de u .

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\text{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel.
 2. Soit F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrer que le plan vectoriel $\text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u et est en somme directe avec F .
 3. Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et qu'en particulier, n est pair.
-

(*) **Exercice 24** (oral CCINP, PC)

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable. Donner $\text{rg}(A - I_3)$. Donner les valeurs propres de A .
 2. Donner les sous-espaces propres de A .
 3. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice A dans une base \mathcal{B} . Quelle est l'action réalisée par u ?
-

(*) **Exercice 25** (oral Mines-Télécom, PC)

Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n qui vérifie $A^2 + 3A + 3I_n = 0$.

1. Montrer que A ne possède pas de valeur propre réelle.
 2. Montrer que n est nécessairement pair.
 3. Calculer $\text{Tr } A$ et $\det A$.
-

(*) **Exercice 26** (extrait oral Mines-Télécom, PC)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M .
 2. Montrer que M est diagonalisable.
 3. Déterminer les valeurs propres de M sans calculs (avec le moins de calculs possible).
-

(*) **Exercice 27** (oral Mines-Télécom, PC)

1. Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Donner un polynôme annulateur de B . En déduire la diagonalisabilité de B .
-

Banque épreuve orale CCINP

Algèbre : 62, 65, 68, 70, 88, 91, 93.
