

Révisions sur les suites numériques

(★) **Exercice 1** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2n+2k-1}$ . Montrer que  $(u_n)$  est monotone et convergente.

(★) **Exercice 2** Soit  $f(x) = 2xe^{-x}$  et la suite  $u$  donnée par  $\begin{cases} u_0 &= 0, 1 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ .

1. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ .
2. Montrer que la suite  $u$  converge vers  $\ln 2$ .

(★★) **Exercice 3** Étudier la suite donnée par  $u_0 \geq -2$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ . On sera amené à discuter suivant les valeurs de  $u_0$ .

(★) **Exercice 4** Étudier la monotonie et la convergence des suites réelles suivantes :

1.  $u$  donnée par son premier terme  $u_0$  et la relation  $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$ .
2.  $v$  donnée par son premier terme  $v_0$  et la relation  $v_{n+1} = v_n - e^{v_n}$ .
3.  $w$  donnée par :  $w_0 > 0$  et la relation de récurrence  $w_{n+1} = \sqrt{w_n^2 + w_n}$ .

(★) **Exercice 5** On pose, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = x^2 - x$  et on considère la suite  $u$  définie par la valeur de  $u_0$  réel et la relation :  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Étudier rapidement les variations de  $f$  et déterminer le signe de  $f(x) - x$ .
2. On suppose que  $u_0 > 2$ .
  - (a) Montrer que  $u_n > 2$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - (b) En déduire la monotonie de  $(u_n)$ . Préciser la limite de  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
  - (c) Montrer que pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 2,  $f'(x) \geq 3$ . En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 3(u_n - u_{n-1})$ , puis que  $u_{n+1} - u_n \geq 3^n(u_1 - u_0)$ .
  - (d) Retrouver alors le résultat de b).
3. Ici  $u_0 = -3$ . Que peut-on dire quant à la convergence de  $(u_n)$  ?
4. On suppose ici que  $\frac{1}{2} < u_0 < 2$ . Dans le cas où «  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} < u_n < 2$  », que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de  $(u_n)$  ? En déduire qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} \notin ]\frac{1}{2}, 2[$ .

(★★) **Exercice 6** On considère la fonction  $f_n$  définie, pour tout réel  $x$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par :

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1$$

1. Montrer que, pour  $n$  entier supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel  $u_n$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ .
2. Montrer que  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ . Donner un équivalent de  $u_n$ .

(★★) **Exercice 7** Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : x \mapsto \ln x + x - n$ .

1. Étudier les variations de  $f_n$  et montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $x_n$ .

2. (a) Montrer que pour  $x > 0$ ,  $\ln x \leq x$ .
- (b) Montrer que  $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$ .
- (c) Donner un équivalent de  $x_n$  puis montrer que  $x_n = n - \ln n + o(\ln n)$ .

**(\*\*) Exercice 8**

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique réel  $y_n$  solution de l'équation :  $\ln x + x = \frac{1}{n}$ .
2. Étudier la convergence de la suite  $(y_n)$ . En notant  $\ell$  sa limite, donner un équivalent de  $y_n - \ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**(\*) à (\*\*) Exercice 9**

1. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$ .

2. Soit  $x$  réel. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}$ .

3. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

4. Donner un équivalent de  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ , de  $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$  et  $n^2 \ln(\cos(\frac{1}{n})) + \frac{n^2}{2} \sin^2(\frac{1}{n})$ .

5. Donner le développement asymptotique à 3 termes de

(a)  $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$

(b)  $(n+1) \ln(n+1) - n \ln n$

**(\*) Exercice 10** Étudier la convergence de  $(z_n)$ ,  $z_n = \frac{n^2 + in + 2}{in^2 + 1}$ .

Séries numériques

**(\*) Exercice 11** Étudier la nature des séries de terme général  $u_n$  dans les cas suivants :

1.  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{2n}$

4.  $d_n = \ln \left( \cos\left(\frac{2}{n}\right) \right)$

8.  $h_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

2.  $b_n = \frac{n-1}{3^n - 2}$

5.  $e_n = ne^{-\sqrt{n}} \ln n$

9.  $i_n = \frac{\ln n}{n}$

3.  $c_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$

7.  $g_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

10.  $j_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

**(\*\*) Exercice 12** À l'aide d'une décomposition en éléments simples, montrer que la série de terme général  $\frac{1}{4k^2 - 1}$  est convergente et que sa somme vaut  $\frac{1}{2}$ .

**(\*) Exercice 13** Soit  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} S_0 &= 1 \\ \text{pour } k \in \mathbb{N}^*, S_k &= X(X-1) \dots (X-k+1) \end{cases}$$

1. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_p[X], \exists! (a_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbb{R}^{p+1}, P = \sum_{k=0}^p a_k S_k$$

2. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $p$ . Montrer que la série de terme général  $\frac{P(n)}{n!}$  converge et déterminer sa somme en fonction des  $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ .

Application : en déduire que la série de terme général  $\frac{n^2}{n!}$  converge et que sa somme est  $2e$ .

---

(★) **Exercice 14** Pour  $n \geq 0$ ,  $u_n = \frac{\cos n}{2^n}$ .

1. Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge.
  2. Calculer la somme de la série.
- 

(★) **Exercice 15** Vérifier que

$$\frac{1}{\binom{n+p}{n}} = \frac{p!}{p-1} \left( \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+2)} \right)$$

et en déduire que  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$  converge et calculer sa somme (réponse  $\frac{p}{p-1}$ ).

---

(★) **Exercice 16** Soit  $u$  la suite donnée par  $\begin{cases} u_0 \in ]0; 1[ \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0; 1[$ , que  $(u_n)$  est décroissante et étudier sa convergence.
  2. Montrer que  $\sum u_n^2$  converge et donner sa somme.
  3. Montrer que  $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  diverge.
  4. En déduire, par utilisation d'un théorème de comparaison, que  $\sum u_n$  diverge.
- 

(★★) **Exercice 17** On considère la suite donnée par  $u_0 = -1$  et par la relation  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}} \right)$ .

1. Calculer  $u_1$ . Étudier la monotonie de  $(u_n)$ .
  2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2})^{-n}$  (on pourra utiliser une quantité conjuguée).
  3. En déduire que  $(u_n)$  converge.
- 

(★★) **Exercice 18** Soit  $(u_n)$  une suite à termes positifs ou nuls. Montrer que les séries de termes généraux  $u_n$ ,  $\frac{u_n}{1+u_n}$ ,  $\ln(1+u_n)$  sont de même nature.

---

(★★) **Exercice 19**

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$ . Montrer que cette quantité est bien définie.
  2. Montrer que  $0 \leq R_n \leq \frac{1}{(n+1)^2 2^n}$ . En déduire une fonction Python permettant de calculer une valeur approchée de  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$  à une précision  $\varepsilon > 0$  près.
- 

(★★) **Exercice 20** On considère la série de terme général  $u_n = \frac{\sin(2^n)}{2^n}$ .

1. Montrer que la série  $\sum u_n$  converge absolument. On note  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ ,  $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$  et  $R_n = S - S_n$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $|R_n| \leq \frac{1}{2^n}$ .

3. Écrire une fonction Python pour l'obtention d'une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-p}$  près.

---

(★★★) **Exercice 21** Calcul de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} t^2 - t \right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$ .

2. Montrer que pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in ]0, \pi]$ ,

$$\sum_{n=1}^N \cos nt = \frac{1}{2} \sin(Nt) \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \cos(Nt) - \frac{1}{2}$$

3. Soit  $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(Nt) \, dt = 0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos(Nt) \, dt$$

4. Soit  $h$  définie sur  $[0, \pi]$  par  $h(t) = \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$  pour  $t \neq 0$  et  $h(0) = 2$ .

En appliquant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

5. Montrer finalement que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

---

(★) **Exercice 22** Montrer que  $(n+1) \ln(n+1) - n \ln n \sim \ln n$  et en déduire un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \ln k$ .

---

(★) **Exercice 23** On considère la suite donnée par  $u_0 = 1$  et la relation  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et donner sa limite.

2. Donner la limite de la suite  $\left( \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right)$ . En déduire un équivalent de  $u_n$ .

---

(★★) **Exercice 24** On pose  $u_n = \frac{n! e^n}{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}}}$  et  $a_n = \ln(u_n)$ .

1. Rappeler la formule de Stirling. En déduire  $\lim u_n$ .

2. Montrer que  $a_{n+1} - a_n \sim -\frac{1}{12n^2}$ . En déduire que  $a_n \sim \frac{1}{12n}$ .

3. Montrer finalement que  $n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left( 1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ .

---

(★★★) **Exercice 25** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n}$ .

1. Montrer que la suite  $u$  diverge. En déduire que  $\lim u_n = +\infty$ .

2. Montrer que  $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$ .

3. Montrer finalement que  $u_n = \ln(\ln n) + o(1)$ .

---

(★★★) **Exercice 26** Soit  $u$  une suite réelle vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

On pose  $w_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ .

1. Montrer que  $u_n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Montrer que  $w_n \sim 1$  et en déduire un équivalent de  $u_n$ .

3. Montrer que  $w_n - 1 \sim \frac{1}{2n}$  et en déduire un développement asymptotique de  $u_n$  à une précision  $o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ .

---

(★) à (★★) **Exercice 27** Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_n = \frac{\cos(u_{n-1})}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Quelle est la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  ?
  2. Déterminer la limite de  $(u_n)$ , un équivalent de  $u_n$ , et la nature de la série  $\sum u_n$ .
  3. À l'aide d'un développement asymptotique de  $u_n$ , donner la nature de la série  $\sum (-1)^n u_n$ .
- 

(★★) **Exercice 28**

1. (a) Montrer que  $\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .  
(b) Quelle est la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  ?  
(c) Montrer que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sqrt{n}}$  diverge. Commentaire ?
  2. En discutant sur le réel  $\alpha > 0$ , déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + n^\alpha}$ .
- 

(★★) **Exercice 29** En discutant sur les paramètres réels  $a$  et  $b$ , donner la nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^a} \quad \text{et} \quad \sum \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^b} \right)$$

---

(★) **Exercice 30** Déterminer la nature des séries de terme général :

$$a_n = n \sin \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{e^{-2n} + n}{n^2 + 1} \quad c_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

---

(★) **Exercice 31**

1. Trouver trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , on ait :

$$\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+2}$$

Montrer que  $\sum \frac{2n-1}{n^3-4n}$  converge et calculer  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$ .

2. Montrer par deux méthodes que  $\sum \ln \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$  converge. Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$ .
- 

(★★) **Exercice 32** On admet (vu en cours) que :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ . On se propose de déterminer

un équivalent de :  $u_n = \prod_{k=2}^n \left( 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$ .

1. Vérifier que pour tout  $n \geq 2$ ,  $\ln u_n = \sum_{k=2}^n \ln \left( 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$ .
2. Montrer que  $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$  converge.
3. Montrer que la série  $\sum \ln \left( 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$  diverge.
4. On considère  $a_n = \ln u_n - \ln(u_{n-1}) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{(-1)^{3n}}{3n\sqrt{n}}$ . Donner la nature de la série de terme général  $a_n$ .

5. On pose

$$C_n = \sum_{k=3}^n \left( \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{(-1)^{3k}}{3k\sqrt{k}} + a_k \right) + \frac{3}{4} + \ln u_2 - \frac{1}{2}\gamma$$

Justifier que la suite  $(C_n)$  est convergente.

6. En déduire l'existence d'une constante  $C$  telle que  $\ln u_n = -\frac{1}{2} \ln n + C + o(1)$ . Donner alors un équivalent de  $u_n$ .

---

(★) **Exercice 33**

1. Montrer que la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$  converge et donner sa somme.
  2. (a) Donner un équivalent de  $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ . Retrouver que la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$  converge.  
(b) Déduire de a. la nature de la série de terme général  $ku_k$ .
- 

(★) **Exercice 34** Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ .

1. Montrer que  $\forall x \in [1, e], \ln x \leq \frac{x}{e}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
  2. (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$ .  
(b) En déduire qu'il existe une constante  $k \neq 0$ , à préciser, telle que  $I_n \sim \frac{k}{n}$ .  
(c) Quelle est la nature de la série de terme général  $I_n$ ?  
(d) Quelle est la nature de la série de terme général  $(-1)^n \frac{I_n}{n}$ ?
  3. On donne  $I_0 = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$ . Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche les valeurs de  $I_1, \dots, I_{50}$ . Retrouvez-vous 1.b. et pourquoi?
- 

(★) **Exercice 35**  $x$  désigne un réel élément de  $[0, 1[$ .

1. (a) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et pour tout  $t$  de  $[0, x]$ , calculer la somme  $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$ .  
(b) En déduire que :  $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ .  
(c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$ .  
(d) Établir alors que la série de terme général  $\frac{x^p}{p}$  est convergente et que  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$ .
2. Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , montrer que la série de terme général  $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$  est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x) \ln(1-x)$$

---

(★) **Exercice 36**

1. Pour  $k$  entier supérieur ou égal à 2, montrer que :

$$\int_{k-1}^k (\ln t)^2 dt \leq (\ln k)^2 \leq \int_k^{k+1} (\ln t)^2 dt$$

Vérifier que l'inégalité de droite est aussi vérifiée pour  $k = 1$ .

2. On pose  $S_n = \sum_{k=2}^n (\ln k)^2$ .

(a) Montrer que pour  $n \geq 3$ , on a :  $\int_1^n (\ln t)^2 dt \leq S_n \leq \int_1^n (\ln t)^2 dt + (\ln n)^2$ .

(b) Vérifier que la fonction  $t \mapsto t((\ln t)^2 - 2 \ln t + 2)$  est une primitive de  $t \mapsto (\ln t)^2$ .

(c) Montrer alors que  $S_n \sim n(\ln n)^2$ .

3. On pose  $b_n = n(\ln n)^2$  et  $w_n = S_n - b_n$ , pour  $n \geq 2$ , et  $w_1 = 0$ .

(a) Vérifier que  $w_n = \sum_{k=2}^n (w_k - w_{k-1})$ .

(b) Montrer que  $w_k - w_{k-1} \sim -2 \ln k$ . En déduire que  $\lim w_n = -\infty$ .

---

(★) **Exercice 37** En discutant en fonction de  $a \in \mathbb{R}$ , donner la nature de la série

$$\sum (n^3 + an)^{1/3} - \sqrt{n^2 + 3}$$

---

(★★) **Exercice 38** Donner un équivalent de  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$  (on pourra effectuer une comparaison série-intégrale).

---

(★★★) **Exercice 39** (oral Mines-Télécom)

Déterminer la nature de  $\sum R_n$ , où  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$ . On demande de proposer deux réponses différentes.

---

Séries vectorielles (pour plus tard)

(★) **Exercice 40** Prouver la convergence et déterminer la somme de la série  $\sum A^k$  où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

---

(★) **Exercice 41** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Étudier la convergence de la série  $\sum A^n$  où  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

---

(★★) **Exercice 42** Soit  $E = \mathbb{K}_n[X]$ . Pour  $P \in E$ , on pose  $D(P) = P'$  et  $T(P) = P(X+1)$ . On admet que  $D$  et  $T$  sont des endomorphismes de  $E$ . Montrer que la série  $\sum \frac{D^k}{k!}$  converge et que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} = T$ .

---

(★★) **Exercice 43** Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $f : E \rightarrow E$  pour laquelle il existe  $k \in [0, 1[$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

1. Montrer que  $f$  possède au plus un point fixe (vecteur  $v$  tel que  $f(v) = v$ ).
  2. Soit  $a \in E$  et la suite  $u$  définie par  $u_0 = a$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
    - (a) Montrer que la série  $\sum u_{n+1} - u_n$  converge.
    - (b) En déduire que  $f$  admet un point fixe.
- 

Banque épreuve orale CCINP

Séries numériques : 5, 6, 7, 8. 1), 43, 46.  
Séries vectorielles : 61.

---