Interrogation n° 9
MP
vendredi 12 décembre 2025
durée : 2 heures

Exercice 1 - Questions proches du cours

Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(2n+1)}{(n+3)!} x^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{n} x^{2n}$.
3. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à préciser.
   (b) Montrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.

Exercice 2

Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \cdots .$$

1. *Étude du cas particulier de la fonction S_1.*
   (a) Montrer que pour x réel, la série $\sum e^{-xn}$ converge si, et seulement si, $x > 0$.
   Étudier la convergence simple sur $]0, +\infty[$ et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1, où
   $$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}$$
   (b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.
   (c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.
2. *Étude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*
   (a) Examiner pour $x \leqslant 0$ la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$.
   (b) Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2 e^{-xn^\alpha}$.
   En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ pour $x > 0$.
   (c) Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.
3. *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*
   (a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} \left(x \mapsto e^{-xn^\alpha} \right)$ sur $[\varepsilon, +\infty[$. En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0, +\infty[$.
   (b) Sans dériver, préciser le sens de variation de la fonction S_α.
   En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

(c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = 1$. On demande de plus l'énoncé précis du théorème utilisé.

(d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geqslant \sum\limits_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N, que : $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant N+1$.
Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 ?

Exercice 3

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

$$\forall x \in I, \quad f_0(x) = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}\,(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.
2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$. Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.
3. Étudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par
$$\varphi(t) = t\ln(t)$$
4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I.
6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale
$$J_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.
8. On pose $J = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on a :
$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$
9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.
