Interrogation n°6 – sujet A
MP
lundi 3 novembre 2025

Nom et prénom / Note et commentaires :

---

question 1

Dans $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, définir $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

question 2

1. *Pour les 3/2 uniquement.*
   Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1[$.
2. *Pour les 5/2 uniquement.*
   Énoncer et démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où $\lim u_n = 0$. Calculer $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.

question 3

Soit a, b et c réels. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

On **donne** $\chi_M = X(X^2 + ac - ab - bc)$. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Interrogation n°6 – sujet B
MP
lundi 3 novembre 2025

Nom et prénom / Note et commentaires :

question 1
Dans $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, définir $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

question 2

1. *Pour les 3/2 uniquement.*
   Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est intégrable sur $]2,+\infty[$.
2. *Pour les 5/2 uniquement.*
   Énoncer et démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où $\lim u_n = 0$. Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.

question 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. À l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes et les lignes, montrer que $\chi_A = (X-a-1)(X+a)(X+1)$.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a, A admet-elle trois valeurs propres distinctes ?
3. Quand $a = 3$, A est-elle diagonalisable ?
4. Quand $a = -2$, A est-elle diagonalisable ?
5. Quand $a = 1$, A est-elle diagonalisable ?