

Interrogation n°6 – sujet A

MP

lundi 3 novembre 2025

Nom et prénom / Note et commentaires :

question 1

Dans $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, définir $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

question 2

1. Pour les 3/2 uniquement.

Montrer que $f : x \mapsto \frac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

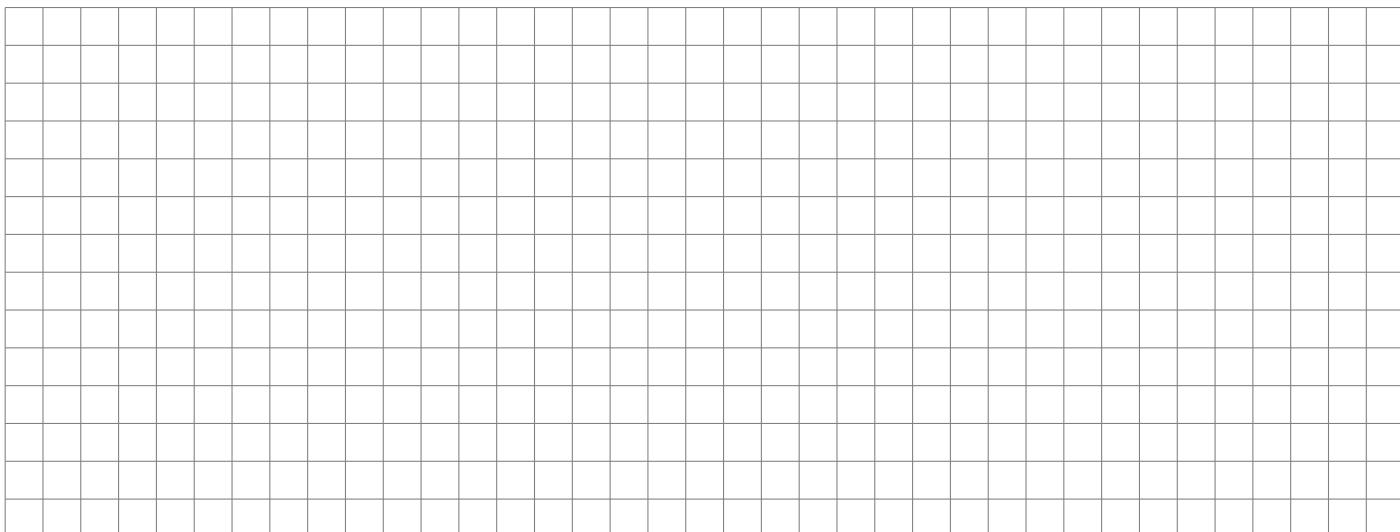
2. Pour les $5/2$ uniquement.

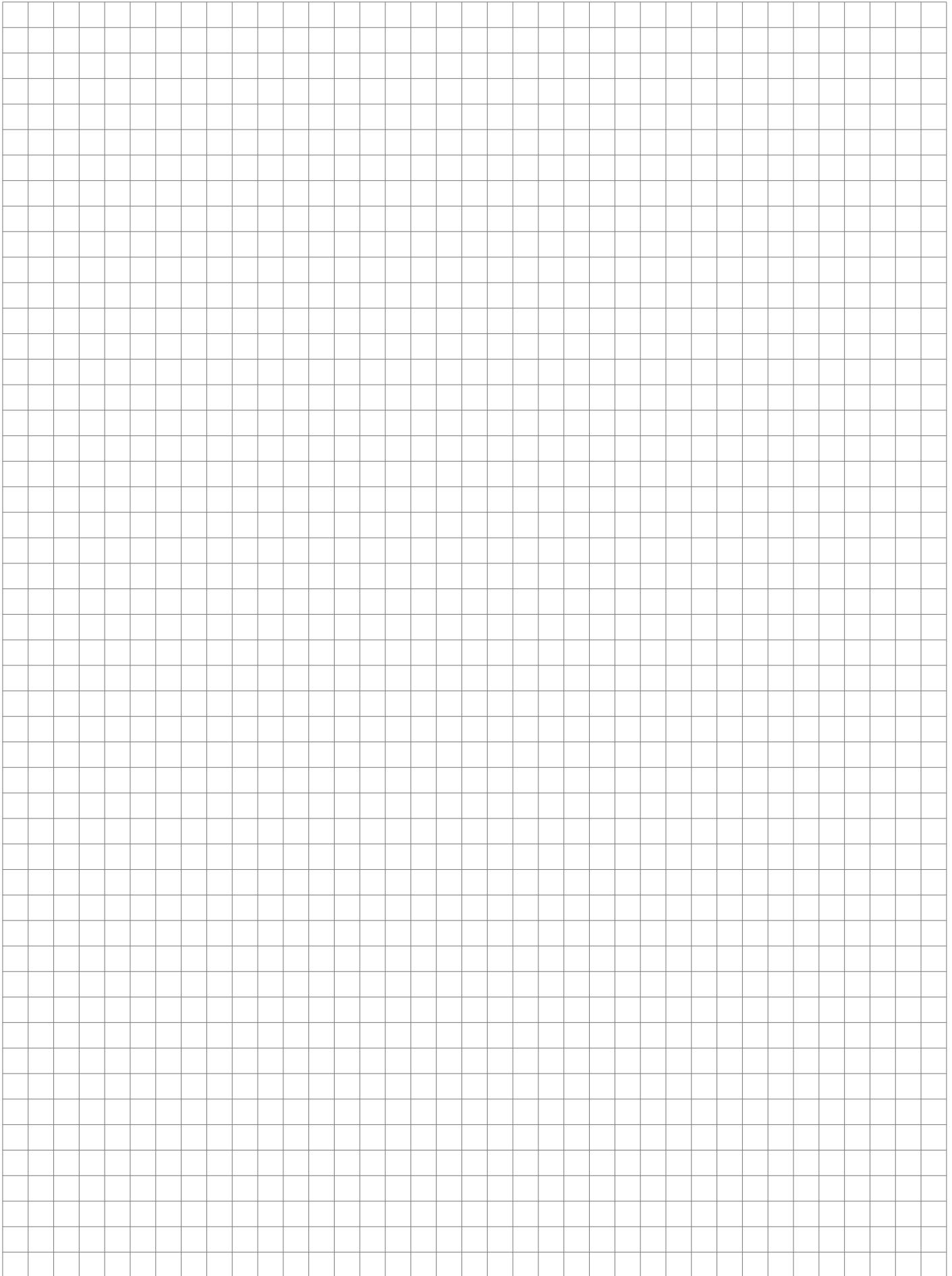
Énoncer et démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où $\lim u_n = 0$. Calculer $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$.

question 3

Soit a , b et c réels. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

On **donne** $\chi_M = X(X^2 + ac - ab - bc)$. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?





Interrogation n°6 – sujet B

MP

lundi 3 novembre 2025

Nom et prénom / Note et commentaires :

question 1

Dans $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, définir $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

question 2

1. Pour les 3/2 uniquement.

Montrer que $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est intégrable sur $]2, +\infty[$.

2. Pour les $5/2$ uniquement.

Énoncer et démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où $\lim u_n = 0$. Calculer $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$.

question 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

- À l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes et les lignes, montrer que $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$.
 - À quelle condition nécessaire et suffisante sur a , A admet-elle trois valeurs propres distinctes ?
 - Quand $a = 3$, A est-elle diagonalisable ?
 - Quand $a = -2$, A est-elle diagonalisable ?
 - Quand $a = 1$, A est-elle diagonalisable ?

