Interrogation n°1 – sujet A
MP
lundi 2 novembre 2026

---

question 1

Donner la définition d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Montrer que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

question 2

1. Montrer que $f : t \mapsto \left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. En vérifiant (évidemment) les hypothèses, appliquer le théorème du produit de Cauchy à deux séries géométriques $\sum x^k$.
3. Donner la forme du terme général u_n lorsque :
   - $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$
   - $u_{n+2} = -4u_n - 4u_{n+1}$
   - $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$
4. *5/2 UNIQUEMENT* Démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où $\lim u_n = 4$ puis dans le cas où $\lim u_n = +\infty$.

question 3

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

On ADMET que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n \|A\| \|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1} \|A\|^p$.
2. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?

Interrogation n°1 – sujet B
MP
lundi 2 novembre 2026

---

question 1

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. Donner l'expression de I_n.

question 2

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer de deux façons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.
3. On considère la suite donnée par

$$\begin{cases} u_1 & = 1 \\ u_{n+1} & = 3u_n - 2 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   Donner l'expression de u_n.

4. *5/2 UNIQUEMENT* Démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où $\lim u_n = 4$ puis dans le cas où $\lim u_n = +\infty$.

question 3

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \displaystyle\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

On ADMET que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que : $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
2. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\displaystyle\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?
