Entraînement
MP
novembre 2026

Exercice 1

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. Dans cette question, et **uniquement cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$.
   (a) En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
   (b) En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.
   (c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini. Retrouver ce résultat à l'aide d'une propriété de cours.

On revient au cas général.

2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.
3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.
   (b) Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. **Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique** où $T > 0$.
   (a) Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante.
   Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (c) Prouver que la fonction H_{λ_0} est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.
   (d) Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.
   (e) Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.
   (b) Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.
   (c) Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   (d) On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.
      i. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 4.
      ii. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

1. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.
2. Justifier que pour tout réel θ :
$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

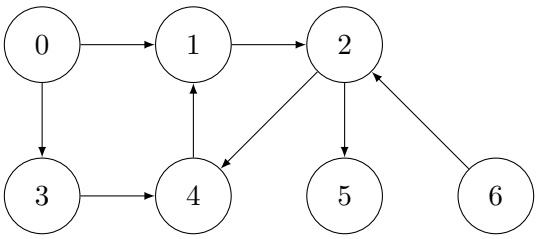
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

3. Justifier la convergence de cette intégrale.
4. Démontrer que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).
5. Calculer pour n et m entiers naturels, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
6. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 3

Hormis pour les questions 3 et 4, les questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice (informatique du tronc commun), les graphes ont leurs sommets numérotés à partir de 0 et ils sont orientés. On les représente par un dictionnaire d'adjacence.
Par exemple, le graphe :



est représenté par le dictionnaire :

```
d = {0: [1, 3], 1: [2], 2: [4, 5], 3: [4], 4: [1], 5: [], 6: [2]}
```

1. Écrire en langage `Python` une fonction `degreMax(d: dict) -> int` qui reçoit en entrée un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré sortant maximal parmi tous les degrés sortants des sommets du graphe.

Si `G` est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de `G` le graphe possédant les mêmes sommets ainsi que les mêmes arêtes mais en sens inverse par rapport à celles de `G`.

2. Représenter le graphe inverse du graphe orienté donné en introduction.
Écrire en langage `Python` une fonction `grapheInv(d: dict) -> dict` qui renvoie un dictionnaire d'adjacence du graphe inverse du graphe représenté par `d`.

On souhaite colorier notre graphe orienté. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. La coloration du graphe est modélisée par une liste `L` telle que `L[s]` est égale à la couleur attribuée au sommet `s`.
Deux sommets du graphe reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur (coloration du graphe valide).

3. Écrire en langage `Python` une fonction `colorationValide(d: dict, L: list) -> bool` qui renvoie `True` si la coloration `L` du graphe représenté par `d` est valide et `False` dans le cas contraire.
4. Donner la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente en fonction du nombre N de sommets et du nombre M d'arêtes. Justifier votre réponse.

On considère deux tables : `FILMS` et `LOCATIONS`. La première contient des informations sur des films et la seconde des informations sur des location de films par les clients.
La table `FILMS` contient les attributs suivants :

— `codefilm` : code d'un film (entier), clé primaire ;

— `nomfilm` (chaîne de caractères).

La table `LOCATIONS` contient les attributs suivants :

— `codecli` : code du client (entier), clé primaire avec l'attribut `codefilm` ;

— `codefilm` : code du film (entier), clé primaire avec l'attribut `codecli` ;

— `datedebut` : date de début de la location (chaîne de caractères) ;

— `duree` : durée de la location (flottant).

5. Écrire une requête SQL permettant de connaître la plus grande durée de location parmi tous les films.
6. *(5/2 uniquement)* Écrire une requête SQL permettant d'extraire le code du film, le nom du film et la durée moyenne de location des films qui ont été en moyenne loués moins de 2 jours. Le résultat doit être classé dans l'ordre décroissant des durées moyennes de location.
