Devoir surveillé n° 6 – sujet B
MP
samedi 4 avril 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Expliciter des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) < 0$.
   Expliciter de même des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) > 0$.
   La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = f(1+u, 1+v) - f(1,1)$.

3. Calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v)$ puis, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
4. Prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right)$.
   Que peut-on en conclure ?
5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Problème

Le but de ce sujet est de calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0,1[$ fixé.
1 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in\,]-\pi, \pi[$, la fonction f définie par

$$f : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1 + t\mathrm{e}^{i\theta}} \end{cases}$$

est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

2 ▷ Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[\,, \quad r'(\theta) = -ie^{i\theta}. \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2} \,\mathrm{d}t$$

Indication : soit $\beta \in]0, \pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta; \beta]$ et $t \in [0, +\infty[$,

$$\left|1 + te^{i\theta}\right|^2 \geqslant \left|1 + te^{i\beta}\right|^2 = (t + \cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$$

Soit g la fonction définie par

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{ix\theta}. \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

3 ▷ Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$,

$$g'(\theta) = ie^{ix\boldsymbol{\theta}} \int_0^{+\infty} h'(t) \,\mathrm{d}t$$

où h est la fonction définie par

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^x}{1+te^{i\theta}} \end{array} \right.$$

Calculer $h(0)$ *(sous-entendu* $\lim\limits_{t\to 0} h(t)$*...)* et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$.
En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi, \pi[$.
4 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right) = \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t\cos(\theta) + 1} \,\mathrm{d}t$$

5 ▷ En déduire que :

$$\forall \theta \in]0, \pi[\,, \quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1+u^2} \,\mathrm{d}u$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$
6 ▷ Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \,\mathrm{d}u$$

7 ▷ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0,1[$ fixé.

8 $\triangleright$ Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

9 $\triangleright$ Montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

10 $\triangleright$ Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

11 $\triangleright$ En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}$$

12 $\triangleright$ En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0;\pi[\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 $\triangleright$ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

14 $\triangleright$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t$$

15 $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t$$

16 $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas $p=0$, cette intégrale est communément appelée « Intégrale de Dirichlet ».

17 $\triangleright$ Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right)$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi.(2p+1)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}$$

Partie IV : Calcul de $\mathbb{E}\left(|S_n|\right)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}\left(X_1=-1\right) = \mathbb{P}\left(X_1=1\right) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

19 $\triangleright$ Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{E}\left(S_n\right)$ et $\mathbb{V}\left(S_n\right)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles.
On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20 $\triangleright$ Montrer que :

$$\mathbb{E}(\cos(S+T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T))$$

21 $\triangleright$ En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_n\right)\right) = (\cos(t))^n$$

22 $\triangleright$ Soient $a, b\in\mathbb{R}$ tels que $a\neq 0$ et $|b|\leqslant|a|$. Nontrer que

$$|a+b| = |a| + \operatorname{signe}(a)b$$

où $\operatorname{signe}(x) = \frac{x}{|x|}$ pour x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right)$$

23 $\triangleright$ Montrer que pour tout $s\in\mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|$$

24 $\triangleright$ En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\left(|S_n|\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

25 $\triangleright$ Conclure que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$