**Devoir surveillé n° 6**
**MP**
*samedi 4 avril 2026*

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

---

## Exercice 1

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour tout $t \in ]0, +\infty[$, $f(t) = \dfrac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}$.
Justifier que la fonction $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

---

## Problème

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique $\chi_A$ soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple $(D, N)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> 1. $A = D + N$ ;
> 2. $D$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) :
> 3. $N$ est nilpotente :
> 4. $DN = ND$.
>
> De plus, $D$ et $N$ sont des polynômes en $A$ et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple $(D, N)$ s'appelle la décomposition de Dunford de $A$.

# Partie I - Quelques exemples

1. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $A$ est diagonalisable, puis lorsque la matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.
Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

2. Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

   Calculer son polynôme caractéristique $\chi_A$, puis donner le couple $(D, N)$ de la décomposition de Dunford de $A$ (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

4. Application.

   Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice $A$.

   Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice $A$ définie en Q3.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 (A - I_n) = 0$.

   Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice $A^2$. Démontrer que le couple $(D, N)$ de la décomposition de Dunford de la matrice $A$ est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

# Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A$.
On notera $\mathrm{Id}$ l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

6. La matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ?

   Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.

7. Déterminer une base $(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

   $$\ker(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(e_1), \quad \ker(u - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(e_2) \quad \text{et} \quad \ker(u - 2\,\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}\,(e_2, e_3)$$

   Écrire la matrice $B$ de $u$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

8. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice $B$ et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice $A$.

9. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes $U$ et $V$ tels que :

   $$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1$$

10. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.

    Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout $x$ vecteur de $\mathbb{R}^3$.

    Démontrer que $p$ est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\,\mathrm{Id})^2$ et $q$ est le projecteur sur $\ker(u - 2\,\mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{Id})$.

11. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de $d$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ (de la question Q7).

    Determiner le couple de la décomposition de Dunford de la matrice $A$ en exprimant $D$ et $N$ comme polynômes de la matrice $A$ (sous forme développée).

# Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

12. Soit $E$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n$. Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes diagonalisables de $E$ qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de $u$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda_i$.

Démontrer que tout sous-espace propre de $u$ est stable par $v$.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour $u$ et $v$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on pourra noter $v_i$ l'endomorphisme induit par $v$ sur $E_{\lambda_i}(u)$.

13. Soient $A$ et $B$ deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

14. Soient $A$ et $B$ deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

15. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

16. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple $(D, N)$ vérifiant les conditions $(1), (2), (3), (4)$ et tel que $D$ et $N$ soient des polynômes en $A$.
Établir l'unicité du couple $(D, N)$ dans la décomposition de Dunford.

# IV Non continuité de l'application $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{D}$

17. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables.
$\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
Si $P$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$, est continue.

18. Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

19. Si $(D, N)$ est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice $A$, on note $\varphi$ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice $A$ associe la matrice $D$. Justifier que $\varphi$ est l'application identité sur $\mathcal{D}$ et en déduire que l'application $\varphi$ n'est pas continue.

---