Devoir surveillé n° 4 – sujet B
MP
samedi 10 janvier 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Fonction de Wallis

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x)=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x\ \mathrm{d}t$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1. Calcul de $\sigma(1)$

1. Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.
2. Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\int_0^{\pi}\left(\alpha t^2+\beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

   puis vérifier que si $t\in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

3. Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=0$$

   et en conclure que

$$\sigma(1)=\frac{\pi^2}{6}$$

2. Équivalents

4. Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.
6. Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.
7. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

8. Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3. Développement en série entière

Si $n \in \mathbb{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin t))^n \,\mathrm{d}t$.

9. Justifier que, si $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$$

10. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$
11. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\,\mathrm{d}u$$

puis que

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12. Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

4. Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \ln\left(a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)\right).$$

13. Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

14. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k.$$

15. En conclure que

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

16. Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left]0,\pi\right], \Psi_n(t) = \ln\left(a_n^2\cos^2(t) + b_n^2\sin^2(t)\right)$$

En déduire $f''(0)$.

5. Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite *ln-convexe* si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J.

17. Vérifier que f est une application de I dans $\mathbb{R}$ *ln-convexe*.
On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbb{R}$ qui sont *ln-convexes* et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.
On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \tilde{f}(x) = \ln(f(2x))$$

18. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19. On suppose ici que $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

20. En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbb{R}$, qui soit *ln-convexe*, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

21. Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbb{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, *ln-convexes* et vérifiant

$$\forall t \in \left]-T,+\infty\right[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

22. Existe-t-il une application h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et *ln-convexe*, vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)?$$