Devoir surveillé n° 4
MP
samedi 10 janvier 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice

Dans tout l'exercice, pour tout entier naturel k, on identifie polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et fonction polynomiale associée pour la structure d'espace vectoriel normé.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ unitaire (le terme de plus haut degré de P est égal à 1).
   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z - \alpha| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|$.
   (b) On suppose dans cette question que P est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de P, montrer que
   $$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^{\deg(P)}$$
   où $\deg(P)$ désigne le degré du polynôme P.
   (c) On prend dans cette question $P(X) = X^3 + 1$.
      i. Donner une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
      ii. Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^{\deg(P)}$.
   (d) On suppose dans cette question que $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^{\deg(P)}$. Montrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
   (e) Énoncer clairement le résultat obtenu.
2. Soient q un entier naturel non nul et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice A. On appelle pour tout entier naturel n, P_n le polynôme caractéristique de A_n et P celui de la matrice A.
   (a) Donner le degré et le coefficient dominant de P_n.
   (b) Prouver que $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\lambda) = P(\lambda)$.
   (c) En déduire que A est trigonalisable.
   (d) Qu'en conclut-on pour l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$?
3. On prend dans cette question $q = 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 1 - \frac{\sin(n)}{n} \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ où n est un entier non nul.
   (a) Déterminer $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.
   (b) Étudier la diagonalisabilité des matrices A_n et A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Conclure.

Problème

Pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose $\binom{\alpha}{n} = 1$ si $n = 0$, et $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geqslant 1$.
On considère la suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \binom{t}{n}\,\mathrm{d}t$$

Le problème a pour objectif de déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$, puis de calculer sa somme sur son intervalle ouvert de convergence et en fin d'étudier son comportement aux bornes de cet intervalle.

1ère Partie
Quelques résultats préliminaires

1. **Une inégalité utile**
   Soit $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi'' \leqslant 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

   (a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)\,\mathrm{d}s$.

   (b) En déduire que $\varphi'(0) = -\int_0^1 (1-s)\varphi''(s)\,\mathrm{d}s$.

   (c) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = -\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(s)\,\mathrm{d}s$.

   (d) Montrer que, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $0 \leqslant \min(s,t) - st \leqslant \frac{1}{4}$, puis en déduire que

   $$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}$$

2. **Étude de la convergence d'une intégrale et d'une série numérique**

   (a) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que la série numérique $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente.

3. **Formule du binôme généralisée**

   Si N est un entier naturel et x un nombre réel, alors $(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{N}{n}x^n$; c'est la formule du binôme de Newton. L'objectif de cette section est d'établir une généralisation de cette formule au cas où N est remplacé par un réel qui n'est pas un entier naturel.

   Pour cela, on considère un nombre réel α, qui n'est pas un entier naturel, et on note f_α la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

   $$\forall x > -1, \quad f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

   (a) Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ de l'équation différentielle

   $$(1+x)y' - \alpha y = 0 \tag{1}$$

(b) On se propose dans cette sous-section de chercher les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme, notée $\psi : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, est solution de (1) sur l'intervalle $]-r, r[$, avec $r = \min(R, 1)$.

i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (n+1)a_{n+1} = (\alpha - n)a_n$.

ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$.

iii. Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de (1) sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

(c) Montrer soigneusement que pour tout $x \in \,]-1, 1[\,$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

2ème Partie
Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière en question

On rappelle que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1 \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \binom{t}{n}\,\mathrm{d}t$$

4. Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$ et tout entier naturel n, $\left|\binom{t}{n}\right| \leqslant 1$.

5. En déduire que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ vérifie $R_1 \geqslant 1$.

6. Soit $x \in \,]-1, 1[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur le segment $[0, 1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]\,, \quad u_n(t) = \binom{t}{n} x^n$$

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur le segment $[0, 1]$.

(b) En déduire que

$$\forall x \in \,]-1, 1[\,, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \int_0^1 (1+x)^t \;\mathrm{d}t = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

7. On cherche ici à montrer que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ vaut 1.

Raisonnant par l'absurde, on suppose que $R_1 > 1$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, x \in \,]-R_1, R_1[$.

(a) Soit $x \in \,]0, 2[$. Justifier que $f(x-1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{-1}{\ln x}$.

(b) Trouver une contradiction et conclure.

3ème Partie
Étude du comportement de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note h_n la fonction définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad h_n(t) = t\ln n + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{t}{k}\right).$$

8. **Étude de la suite de fonctions** $(h_n)_{n\geqslant 2}$
   On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :
$$\forall n \geqslant 2, \forall t \in [0,1]\,, \quad v_n(t) = \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) - t\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
   (a) Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]\,,\ h_n(t) = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k(t)$.
   (b) En utilisant le résultat de la première section de la première partie, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]\,,\ 0 \leqslant v_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)} - \dfrac{1}{4n}$.
   (c) En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge normalement sur le segment $[0,1]$.
   (d) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers une fonction notée h, puis justifier que h est continue sur le segment $[0,1]$.
9. **Recherche d'un équivalent de la suite** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, b_n = (-1)^{n-1}\,|b_n|$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $(n+1)\,|b_{n+1}| = \displaystyle\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h_n(t)}\,\mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]\,, 0 \leqslant h(t) - h_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.
   (d) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'encadrement
$$e^{-\frac{1}{4n}}\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant (n+1)\,|b_{n+1}| \leqslant \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}\,\mathrm{d}t$$
   (e) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln^2 n}\int_0^{\ln n} se^{-s}\left(1-\frac{s}{\ln n}\right)e^{h\left(\frac{s}{\ln n}\right)}\,\mathrm{d}s$$
   (f) On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :
$$\forall t \geqslant 0, \quad g(t) = (1-t)e^{h(t)} \text{ si } t \in [0,1] \text{ et } g(t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 1$$
      i. Justifier que la fonction g est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
      ii. Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la suite numérique
$$\left(\int_0^{+\infty} se^{-s}g\left(\frac{s}{\ln n}\right)\mathrm{d}s\right)_{n\geqslant 2} \quad \text{converge vers 1.}$$
      iii. Déduire de ce qui précède que $|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ et que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$.
10. **Retour à l'étude de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence**
   (a) Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$, de la variable réelle x, converge normalement sur le segment $[-1,1]$.
   On note encore f la somme de cette série sur le segment $[-1,1]$:
$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$
   (b) Justifier que, pour tout $x \in \,]-1,1]\,, \quad f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$.
   (c) Justifier la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n b_n$ et calculer sa somme.