Devoir surveillé n° 3
MP
samedi 15 novembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k$.
2. Soit p un entier naturel non nul.
   Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.
3. Soit $P \in E_n$.
   Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que :
   $$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.
5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.
   Déterminer A et A^{-1}.
7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.
8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?
9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme Q de E_n.
   À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
   On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.
10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.
11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Exercice 2

À toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels et à toute suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de réels non nuls, on associe la suite de matrices $(A_n)_{n\geqslant 1}$ où

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note $P_n(X) = \det(XI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

1. Déterminer une relation de récurrence entre les polynômes P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.
2. (a) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable.
   (b) Soit λ une valeur propre réelle de A_n. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda - a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & 0 \\ & \dots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

   extraite de la matrice $\lambda I_n - A_n$ en supprimant sa première colonne et sa dernière ligne.
   (c) En déduire le rang de la matrice $\lambda I_n - A_n$ pour λ valeur propre de A_n.
   (d) En déduire que le polynôme caractéristique P_n admet n racines distinctes.
3. On note $\Delta_n(x)$ le déterminant $\begin{vmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{vmatrix}$.
   (a) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2\,\Delta_{n-1}(x)$.
   (b) Montrer que $\Delta_1(x)$ est strictement positif pour tout réel x. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour $n \geqslant 2$.
4. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que l'application $x \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule entre deux zéros consécutifs de P_n. On pourra considérer l'application $x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$.

Problème

On note, pour n entier tel que $n \geqslant 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à la réduction de matrices par blocs du type $\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre réels non tous nuls.

On rappelle qu'un produit de matrices par blocs se fait de manière similaire à un produit classique :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

chaque matrice bloc étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pourra utiliser ici sans démonstration que si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme, $A = P^{-1}BP$ entraîne $T(A) = P^{-1}T(B)P$.

On rappelle que si A, B, C sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

Questions préliminaires

L'objectif est de démontrer le résultat suivant : « une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, vérifiant $P(M) = 0$ ».
Pour cela, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. On suppose que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ($p \geqslant 1$) les valeurs propres distinctes de u. Démontrer que le polynôme $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$ est annulateur de u.
2. Réciproquement, on suppose que $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sont r nombres réels distincts ($r \geqslant 1$) tels que $Q = (X - \mu_1) \ldots (X - \mu_r)$ est un polynôme annulateur de u. En utilisant le lemme des noyaux, démontrer que u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que le spectre de u est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

3. On suppose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale vérifiant $V = PDP^{-1}$ (on précisera P^{-1}).
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice Q est inversible, donner la matrice Q^{-1} et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
5. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice R inversible et une matrice Δ diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs
$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$
Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$?
6. On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent. On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Soit T un polynôme scindé à racines simples annulateur de cette matrice, calculer $T(A)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

7. Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P telle que $E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.
8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
9. On suppose que la matrice F est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de F, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On note U' le polynôme dérivé de U.

Démontrer que $\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

10. Vérifier que le polynôme minimal de la matrice A est X. En déduire la valeur de la matrice A.
11. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.
12. On suppose que la matrice F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Exprimer le polynôme caractéristique de F en fonction de celui de A. En déduire que F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
13. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Applications

14. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par u.
On pourra s'inspirer de la question 4.

15. En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple de ce problème, démontrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.

16. *(5/2 uniquement)* Utiliser la question précédente pour donner les solutions du système différentiel de fonctions inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 de la variable réelle t :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases}$$

On ne demande pas de détail.