

Devoir surveillé n° 1 MP

samedi 12 septembre 2026



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à souligner ou encadrer les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .

1. Résoudre $AX = 2X$. Résoudre $AX = X$.
En déduire que $F = \ker(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur u de F et un vecteur directeur v de G .
2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$.
3. En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P , D et P^{-1} .
4. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n sous la forme d'un tableau matriciel.

Exercice 2

On note $E = \mathcal{C}_m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

On note $C = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des fonctions de E continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

On note F le sous-espace vectoriel des fonctions de E qui sont 1-périodiques, c'est-à-dire qui vérifient $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si f est une fonction de E , on lui associe la fonction notée $M(f)$ et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad M(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

1. Montrer que M est une application linéaire. Montrer que $M : C \rightarrow C$.
On **admet** que M est un endomorphisme de E .
2. Soit $f \in E$ une fonction continue. Montrer que $M(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée $[M(f)]'$.
3. Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comparer $[M(f)]'$ et $M(f')$.
4. Soit $f \in E$. On suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $M(f)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $f \in E$ continue. Montrer que $M(f)$ est constante si et seulement si f est élément de F .
 Dans toute la suite, si $f \in F$, on note $\langle f \rangle = \int_0^1 f$ la valeur constante de $M(f)$.
6. Calculer $\langle f \rangle$ lorsque f est définie, respectivement, par :
 - $f(t) = \cos(2\pi t)$;
 - $f(t) = |\cos(\pi t)|$;
 - $f(t) = \{t\}$ où l'on a défini la *partie fractionnaire* de t par $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.
7. Montrer que si f est polynomiale de degré $d \geq 0$, alors $M(f)$ est également polynomiale ; préciser le degré de $M(f)$.
On pourra commencer par montrer que lorsque $P = X^n$, $M(P)$ est une fonction polynomiale de degré n .
8. Soit $d \geq 1$. Montrer que l'application $\psi : P \mapsto M(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$, et donner la matrice représentative de ψ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^d)$ de $\mathbb{R}_d[X]$.
 L'application ψ est-elle injective ? Surjective ?
9. Déterminer une fonction f_1 telle que $M(f_1)$ soit égale à la fonction identité $x \mapsto x$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des formes linéaires sur E . On note, pour tout entier naturel k , $P^{(k)}$ le polynôme dérivé k -ième d'un polynôme P (avec $P^{(0)} = P$).

On note $P_0 = 1$ et, pour tout entier naturel k non nul, $P_k = X(X - k)^{k-1}$ (on a donc $P_1 = X$).

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .
2. On note, pour tout entier r de $\llbracket 0, n \rrbracket$, φ_r l'application qui, à chaque polynôme P de E , associe

$$\varphi_r(P) = \frac{1}{r!} P^{(r)}(r) \quad (\text{on a donc } \varphi_0(P) = P(0)).$$

- (a) Soit $(k, r) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Calculer $P_k^{(r)}$. On distinguera les cas $k < r$ et $k = r$, puis le cas $k > r$, que l'on traitera à l'aide de la formule de Leibniz.
- (b) Pour tout couple (k, r) d'entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$, vérifier que $\varphi_r(P_k) = 0$.
 Calculer aussi $\varphi_r(P_0)$ lorsque $r \neq 0$ et $\varphi_0(P_k)$ lorsque $k \neq 0$.
- (c) Pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, vérifier que $\varphi_k(P_k) = 1$. Calculer aussi $\varphi_0(P_0)$.
- (d) Soit $P \in E$. Établir l'égalité :

$$P = \sum_{k=0}^n \varphi_k(P) P_k$$

- (e) Montrer que $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

3. Établir, pour tout couple (x, y) de nombres réels, l'égalité :

$$(x + y)^n = y^n + x \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (x - k)^{k-1} (y + k)^{n-k}$$

On pourra considérer le polynôme $(X + y)^n$.

4. (*question plus difficile*) Établir, pour tout couple (x, y) de réels, l'égalité :

$$P_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

Exercice 4

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.

$(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} (X - i)$.

On **admet** (ce que nous saurons montrer après le chapitre Séries entières) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \quad (\#)$$

Cette relation servira pour la question 6.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $] -1, 1[$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j$ (*).
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.
4. Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq j \leq k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}$.
5. Écrire une fonction Python **alpha** qui prend un couple d'entiers (k, j) en paramètre et qui renvoie la valeur $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction **binome** telle que **binome**(n,k) renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
6. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}$$

7. À l'aide de la fonction Python **alpha**, écrire une fonction Python **P** qui prend l'entier k en paramètre et qui renvoie la liste des coefficients de degré 0 à k de P_k .
8. On **admet** (ce que nous saurons montrer après le chapitre Séries entières) :

$$\forall x \in]-1, 1[, f'_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^{n-1}$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P'_k + (k+1)XP_k$.

9. Calculer explicitement P_2 et P_3 .
10. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.
11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $x^{k+1} P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.
12. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k .