

Devoir des 5/2 – septembre 2026

MP

pour jeudi 24 septembre 2026



Partie 1 : Pseudo-inverse d'une matrice

On pourra se permettre d'identifier une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme qui lui est associé dans la base canonique (de sorte que des notions comme le noyau, l'image ou le rang de A prennent sens).

La transposée d'une matrice A est notée $A^\top$ et sa trace est notée $\text{tr}(A)$.

Le groupe des matrices réelles inversibles de taille $d \times d$ est noté $\text{GL}_d(\mathbb{R})$.

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on dit que $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $AB = BA$
- (ii) $ABA = A$
- (iii) $BAB = B$

1. Montrer que si A admet un pseudo-inverse alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2)$.

Réciproquement, on suppose que $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est telle que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2) = r \geq 1$. Soit a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A .

Cette hypothèse sur les rangs tient pour les questions 2, 3, 4 et 5.

- 2. Montrer que $\mathbb{R}^d = \ker(a) \oplus \text{Im}(a)$.
- 3. Montrer qu'il existe $C \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$ et $P \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ tels que

$$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

- 4. En déduire l'existence d'un pseudo-inverse de A .
- 5. On veut montrer que le pseudo-inverse est unique. Soit B un pseudo-inverse de A et b l'endomorphisme canoniquement associé à B .
 - (a) Montrer que $\ker(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par b .
 - (b) Exprimer la restriction de b à $\text{Im}(a)$ en fonction de celle de a , et montrer que $b|_{\ker(a)} = 0$.
 - (c) Conclure.
- 6. Dans cette question, on suppose que $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est de rang 1.
 - (a) Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = XY^\top$.
 - (b) Montrer que $A^2 = (\text{tr}(A))A$.
 - (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\text{tr}(A)$ pour que A admette un pseudo-inverse.

Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on définit l'indice de A , noté ν , comme le plus petit entier naturel k tel que $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(A^{k+1})$. On note toujours a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A .

- 7. Montrer que ν existe et est compris entre 0 et d .
(Indication : on pourra s'intéresser à la suite $(\text{Im}(a^k))_{k \geq 0}$.)

8. Montrer que $\mathbb{R}^d = \ker(a^\nu) \oplus \text{Im}(a^\nu)$.
9. Montrer qu'il existe $C \in \text{GL}_\nu(\mathbb{R})$, $P \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ et une matrice $N \in \mathcal{M}_{d-\nu}(\mathbb{R})$ nilpotente tels que

$$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}$$

Avec les notations de la question précédente, on pose $A^\# = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

10. Montrer qu'on a les relations $AA^\# = A^\#A$, $A^\#AA^\# = A^\#$ et $A^{\nu+1}A^\# = A^\nu$.
11. (a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, alors M^{-1} est un polynôme en M .
- (b) (*Question difficile qui peut être passée*) En déduire que $A^\#$ est un polynôme en A .

Partie 2 : Application aux équations différentielles linéaires

Dans cette partie, on considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et on s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) \quad Ax' + Bx = 0,$$

où $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction dérivable (ici on a identifié $\mathbb{R}^d$ avec l'espace des matrices colonnes $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$).

On dira qu'une condition initiale x_0 est *consistante* si (E) admet une solution telle que $x(0) = x_0$, et on dira que l'équation différentielle (E) est *bien posée* si pour toute condition initiale x_0 consistante, (E) admet une unique solution telle que $x(0) = x_0$.

12. Dans cette question, on suppose que A est inversible. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, (E) admet une unique solution telle que $x(0) = x_0$, que l'on exprimera à l'aide de l'exponentielle de matrice.
13. Dans cette question, on suppose que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer un sous-espace vectoriel V tel que (E) admet une solution telle que $x(0) = x_0$ si et seulement si x_0 appartient à V .
- (b) Cette solution est-elle unique ?

Si A et B sont de nouveau des matrices $d \times d$ arbitraires, on considère l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda A + B \text{ est inversible.}$$

14. Montrer que si A ou B est inversible, alors (H) est satisfaite.

On suppose dorénavant que (H) est satisfaite, et on pose alors $\hat{A} = (\lambda A + B)^{-1}A$ et $\hat{B} = (\lambda A + B)^{-1}B$.

15. Montrer que l'équation (E) est bien posée si et seulement si l'équation $\hat{A}x' + \hat{B}x = 0$ est bien posée.
16. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$, un entier ν tel que $0 \leq \nu \leq d$, une matrice $C \in \text{GL}_\nu(\mathbb{R})$, et une matrice $N \in \mathcal{M}_{d-\nu}(\mathbb{R})$ nilpotente tels que

$$\hat{A} = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad \hat{B} = P \begin{pmatrix} I - \lambda C & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{pmatrix} P^{-1}$$

17. Montrer que si z est une solution de l'équation différentielle $Nz' + (I - \lambda N)z = 0$ alors $z = 0$.
(Indication : on pourra commencer par observer que si k est tel que $N^k = 0$ alors $N^{k-1}z = 0$.)
18. Montrer que l'équation (E) est bien posée.

Remarque : on peut montrer que réciproquement, si (E) est bien posée, alors (H) est satisfaite.
