Devoir des 5/2 – février 2026
MP
pour jeudi 5 février 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

Ce sujet comporte quatre parties, qui peuvent être traitées indépendamment :

— La partie I étudie deux façons d'approcher le réel $\sqrt{2}$.

— La partie II généralise la méthode de Héron d'Alexandrie étudiée en sous-partie I.B au cadre des matrices symétriques positives.

— La partie III traite le cas général de la méthode de Newton numérique réelle.

— La partie IV s'inspire de la méthode de Newton abordée en partie III pour établir l'existence de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford, par une approche algorithmique et en donne une application à la détermination de la racine carrée de certaines matrices.

Notations

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et q est un entier naturel non nul.
On note $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille q à coefficients dans $\mathbb{K}$; on note I_q la matrice identité dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $P^\top$ la transposée d'une matrice P. On note $\mathscr{S}_q(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On note $O(q)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $P^\top P = I_q$.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de M.
Pour $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{K}$, on note $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_q)$ la matrice A de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telle que,

$$\text{pour tous } 1 \leqslant i, j \leqslant q, \quad [A]_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ d'une norme $\|.\|$. On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ ne dépend pas du choix de la norme $\|.\|$. On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants : pour toute suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et pour tout matrice M de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$,

— La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M si, et seulement si, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, la suite $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$;

— Si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, alors les suites $(AM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_nA)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AM et MA.

I Quelques approximations de $\sqrt{2}$.

I.A- Via un développement en série entière.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$$

Q 1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ vaut :

$$R = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 2. Donner, sans justification supplémentaire, l'expression de la fonction somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ sur $]-R, R[$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} b_n x^n$$

Q 4. Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}b_n$.

Q 5. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}b_n x^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}b_n$.

Q 6. Montrer que

$$\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_k + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

I.B- Via la méthode de Héron d'Alexandrie.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1}(a) = \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right) \end{cases}$$

Q 7. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.

Q 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2 - a^2)$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n(a) \geqslant \sqrt{a}$.

Q 9. Montrer que $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Q 10. Calculer $c_1(2)$. A l'aide de la question Q8, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(2)^2 - 2 \leqslant 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$$

En déduire que

$$\sqrt{2} = c_n(2) + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$$

I.C- Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$: vitesses de convergence.

Q 11. Parmi les deux suites $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$, déterminer celle qui converge le plus vite vers 0.

Dans la question suivante, on s'interdit d'utiliser une valeur approchée de $\sqrt{2}$ stockée dans Python. En particulier, on s'interdit l'utilisation de `2**(1/2)`, `math.sqrt(2)` *ou* `numpy.sqrt(2)`.

Q 12. Écrire une suite d'instruction en Python permettant, grâce à la méthode de la question Q10, d'obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ avec 10 décimales correctes.

II Racine carrée d'une matrice symétrique positive.

On note $\mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M \in \mathscr{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^\top MX \geqslant 0$ pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.
Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

II.A- Racines carrées de la matrice I_2.

Q 13. Rappeler sans démonstration la description des matrices de $\mathrm{O}(2)$.
On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.

Q 14. Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $\mathrm{O}(2)$. Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?

II.B- Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive.

Q 15. Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.

Q 16. Soit $M \in \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

Q 17. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$.
On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M.

II.C- Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle.

Soit $M \in \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O(q)$ telle que

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) P^\top$$

On rappelle de plus que, pour tout réel $a \geqslant 0$, la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ définie en sous-partie I.B, est à valeurs strictement positives et converge vers $\sqrt{a}$. On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + MM_n^{-1}\right) \end{cases}$$

Q 18. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P \operatorname{diag}\Big(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q)\Big) P^\top$$

Q 19. En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

III Méthode de Newton numérique.

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I telle que f' ne s'annule pas sur I.

III.A- Convergence de la méthode de Newton.

Q 20. Que dire du nombre de points d'annulation de f sur I ?

On suppose qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$. Pour tout $r > 0$, on pose $J_r = [c - r, c + r]$.
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\begin{cases} c_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} \end{cases}$$

L'objectif de cette sous-partie III.A est de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $J_r \subset I$ et tel que, si $c_0 \in J_r$, alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

Q 21. Soit $r > 0$ tel que $J_r \subset I$. Justifier que $s_r = \sup\limits_{J_r}|f''|$ et $i_r = \inf\limits_{J_r}|f'|$ sont bien définis et que $i_r > 0$.

On note $K_r = \dfrac{s_r}{2i_r}$.

Q 22. Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $0 \leqslant rK_r < 1$.

Dans la suite de cette sous-partie III.A, on fixe $r > 0$ tel que $rK_r < 1$.

Q 23. On suppose que $n \in \mathbb{N}$ et $c_n \in J_r$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|c_{n+1} - c| \leqslant K_r|c_n - c|^2,$$

puis en déduire que $c_{n+1} \in J_r$.

Q 24. Montrer que, si $c_0 \in J_r$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$ et conclure.

III.B- Une implémentation en Python.

Q 25. On désigne dans cette question par `df` la fonction Python représentant f'. Écrire une fonction Python `newton(c0,f,df)` prenant en arguments le réel c_0 et les fonctions f et f' et renvoyant, si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, une valeur approchée de c et la valeur `None` si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
On pourra convenir ici que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si on trouve un $n \leqslant 50$ tel que $|f(c_n)| < 10^{-10}$, et qu'elle diverge sinon.

IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée.

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.
Dans toute cette partie IV, on fixe $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M (avec $s \in \mathbb{N}^*$). On définit alors

$$P(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$$

On note P' le polynôme dérivé de P.
Pour tout polynôme $Q = \sum\limits_{k=0}^{d} \gamma_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $Q(M) = \sum\limits_{k=0}^{d} \gamma_k M^k \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et on pose

$$\mathbb{C}[M] = \left\{Q(M) | Q \in \mathbb{C}[X]\right\}$$

On admet alors et on pourra utiliser librement que :

— si $A, B \in C[M]$, alors A et B commutent, et $A+B$ et AB appartiennent à $\mathbb{C}[M]$;
— Si $Q \in \mathbb{C}[X]$ et si $A \in C[M]$, alors $Q(A) \in \mathbb{C}[M]$.

IV.A- Une méthode de Newton matricielle

Q 26. Montrer que, pour toute racine complexe μ de P', la matrice $M-\mu I_q$ est inversible. En déduire que $P'(M)$ est inversible.

Q 27. Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de M divise P^q. En déduire que $P(M)$ est nilpotente.

Grâce à ces résultats, on peut définir la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
— M_n est bien définie et appartient à $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$;
— il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = \Big(P(M)\Big)^{2^n} B_n$;
— la matrice $P'(M_n)$ est inversible

Q 28. Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Q 29. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices M et M_n commutent.

Q 30. On note A la limite de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que A est diagonalisable.

Q 31. On pose $N = M - A$. Justifier que A et N commutent et que N est nilpotente.

IV.B- Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles symétriques.

Q 32. En utilisant le développement limité en 0 de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$, montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

Q 33. En déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$ lorsque N est une matrice nilpotente.

Pour les questions suivantes, on suppose que M est à coefficients réels et trigonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et que le spectre de M inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
On considère alors les matrices A et N introduites dans la sous-partie IV.A..

Q 34. Justifier que A et N sont à coefficients réels et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Q 35. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q 36. Justifier que la méthode de Héron d'Alexandrie de la sous-partie II.C peut être appliquée à la matrice A afin d'obtenir une racine carrée A' de A. En déduire l'expression d'une racine carrée de M.
