Devoir maison n° 8
MP
pour jeudi 11 décembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Pour n entier naturel non nul, on note

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

et on pose $\sigma_0 = 0$. À toute suite complexe a, on associee la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

I : deux exemples

1. **Cas d'une suite constante.**
   Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et la suite a définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.
   (a) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) La série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ (resp. $\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2. **Cas d'une suite géométrique.**
   Soit $z \in \mathbb{C}$ et la suite a définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.
   (a) Exprimer a_n^* en fonction de z et n.
   (b) On suppose que $|z| < 1$.
      i. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
      ii. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.
   (c) On suppose que $|z| \geqslant 1$.
      i. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$?
      ii. Quelle est la nature de $\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$ si $z = -2$?
      iii. On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
      Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

II : Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

3. **Comparaison des convergences des deux suites.**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [\![0, n]\!]$.
      i. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
      ii. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.
   On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

   (c) On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

   (d) On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

   (e) La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

4. **Comparaison des convergences des séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$.**
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

   (a) Pour $n \in [\![0, 3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est-à-dire sous la forme $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

   (b) On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [\![0, n]\!]$:

   $$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

      i. À quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question précédente ?
      ii. Établir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

   (c) On suppose que la série $\sum(a_n)$ est convergente. Montrer que la série $\sum(a_n^*)$ est convergente et exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

   (d) La convergence de la série $\sum(a_n)$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum(a_n^*)$?

III : Une étude de fonctions

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \; ; \; g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \; ; \; \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$$

5. **Étude de f.**
   (a) Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.
   (c) Expliciter $e^{-x}f(x)$ pour tout x réel.
6. **Étude de g.**
   (a) Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Exprimer $g' - g$ en fonction de f.
   (c) Montrer que pour tout x réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) \, \mathrm{d}t$$

7. **La fonction F.**
   On condidère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) \, \mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{kk!(n-k)!}$. Exprimer γ_n en fonction de n et σ_n.
8. **Étude de la fonction ϕ.**
   (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \sigma_n x^n$.
   (b) Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction ϕ, et étudier ses variations sur $[0, R[$.
   (c) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   (d) **Valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.**
   En utilisant les résultat de la partie II et de la question 8.c., expliciter la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.
   (e) Expliciter $\phi(x)$ pour $x \in \Delta$ et retrouver la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.
