Devoir maison n° 7
MP
pour jeudi 4 décembre 2025

Lycée Camille PISSARRO

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
ϟ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ϟ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{n+1}-1$ par $X-1$.
2. Donner, sans justification, la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ ainsi que son ensemble de définition.

*****

3. **Étude d'une suite.**
   a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
   b. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t$.
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.
4. **Étude de la série de terme général $u_n - \ell$.**
   a. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
   Pour tout entier naturel non nul p, et tout réel $t\in[0,1]$, on pose : $g_p(t) = (1-t)t^{p(n+1)}$.
   Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.
   b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.
   c. *(5/2 uniquement)* En utilisant la série de fonctions définie au a, démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad u_n-\ell=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)}$$

d. Pour tout p entier naturel non nul, on pose : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\, h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)((t+1)p+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

e. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On admettra que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2 – ✍

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout le reste de l'exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k$.

2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

4. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5. Montrer que si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\epsilon, +\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \ \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.
