Devoir maison n° 6
MP
pour jeudi 27 novembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

On considère la fonction f définie sur $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$; on admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U :

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$$

1. Montrer que f admet un unique point critique (a, b) que l'on déterminera.
2. On introduit, pour $t > 0$, $\psi(t) = t + \frac{1}{t}$.
   (a) Vérifier que $f(x, y) = 2 + \psi(x) + \psi(y) + \psi(\frac{x}{y})$.
   (b) Montrer que (a, b) correspond à un minimum global de f sur U.

Exercice 2 – ✍

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

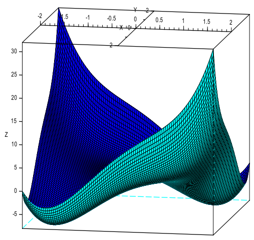
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{cases}$
   (c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f. Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.
   (b) *(5/2 uniquement)* Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.
   (c) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en $(0, 0)$ pour f.
4. (a) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
   (b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?
5. (a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

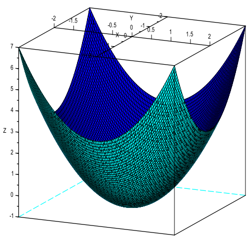
```
function z = f(x,y)
z = ...
endfunction

x = linspace(-2,2,101)
y = x
fplotd3d(x,y,f)
```

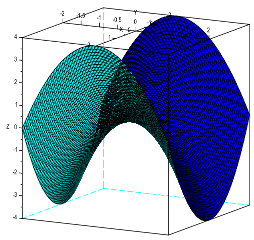
(b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 3 – ↯

Posons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x\sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$. ($\lfloor\cdot\rfloor$ désignant la fonction partie entière).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| \leqslant |x|$. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, g note son prolongement.
3. Posons $T_f(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x > 0$. T_f a-t-elle une limite quand $x \to 0$?
   Indication : utiliser les suites définies par $x_n = \frac{2}{2n+1}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$. g est-elle dérivable en 0 ?
4. Préciser l'ensemble des points où f est continue.

Exercice 4 – ↯

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est valeur asymptotique de f s'il existe une fonction $\gamma : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(\gamma(t)) = \alpha$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs asymptotiques de $f : z \longmapsto \dfrac{z}{1+|z|}$.
2. Dans cette question, $f : z \longmapsto e^z$. Soit α une valeur asymptotique de f. On raisonne par l'absurde en supposant que $|\alpha| > 0$. Soit $\gamma : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \exp(\gamma(t)) = \alpha$.
   On note a et b les parties réelles et imaginaires de γ. On pose $\gamma(t) = a(t) + ib(t)$ avec a et b fonctions réelles.
   (a) Montrer que a possède une limite en $+\infty$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t) = +\infty$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t) = -\infty$.
   (c) On se place dans le cas où $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t) = +\infty$. Montrer qu'il existe une suite (t_n) telle que pour n assez grand, $b(t_n) = n\pi$.
   (d) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim t_n = +\infty$.
   (e) Traiter le cas où $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t) = -\infty$.
   (f) Déterminer l'ensemble des valeurs asymptotiques de f.
