

Devoir maison n° 2 MP

pour jeudi 17 septembre 2026



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✎ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✎ sont OBLIGATOIRES.

⚡ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ⚡ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✎

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On considère un polynôme P de degré n à coefficients réels et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que la famille $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que les matrices A et $A^\top$ sont inversibles, où :

$$A = \begin{pmatrix} P(a_0) & P(a_1) & P(a_2) & \dots & P(a_n) \\ P'(a_0) & P'(a_1) & P'(a_2) & \dots & P'(a_n) \\ P''(a_0) & P''(a_1) & P''(a_2) & \dots & P''(a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{(n)}(a_0) & P^{(n)}(a_1) & P^{(n)}(a_2) & \dots & P^{(n)}(a_n) \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – ✎

Soient $x_1, \dots, x_p$ des réels distincts, et $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ des familles quelconques de réels.

1. Montrer que l'application Φ suivante est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2p}$.

$$\Phi : P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_p), P'(x_1), \dots, P'(x_p))$$

2. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vérifiant, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$.
-

Exercice 3 – ⚡

On note $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On note, pour tout $(x, t) \in [0, 1]^2$, $\min(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$

1. Questions préliminaires

- (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de α , l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$.
- (b) Soient $h \in E$ et $\alpha \in [0, 1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \int_a^x h(t) dt$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et déterminer sa dérivée.

2. Cas particuliers

- (a) Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min(\frac{1}{3}, t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
- (b) Calculer $\int_0^1 \min(\frac{1}{3}, t) dt$.
- (c) Soit $x \in [0, 1]$. Exprimer $\int_0^1 \min(x, t) dt$ en fonction de x .

3. Soit $f \in E$.

- (a) Justifier que $F : x \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$ définit une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, calculer $F'(x)$.
- (b) Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.
- (c) Démontrer alors que F est C^2 sur $[0, 1]$ et montrer que $F'' = -f$.

À toute fonction f de E , on associe $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E .

5. L'application T est-elle injective ?

6. On pose $A = \{G \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\}$.

- (a) Montrer que $\text{Im}(T) \subset A$.
- (b) Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.
- (c) Déterminer $\text{Im } T$.

7. Recherche des éléments propres de T

- (a) Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T , alors λ est strictement positive. *On pourra utiliser la question 3.*
- (b) Déterminer les valeurs propres de T . *On pourra utiliser la question 3.*
- (c) Pour chaque valeur propre de T , déterminer la dimension et une base du sous espace propre associé.