

Devoir maison n° 13

MP

pour jeudi 19 mars 2026



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

Problème

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et n un entier
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On note (E_f) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = f(x)$$

Dans cet exercice, on appelle solution de (E_f) toute application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant (E_f) sur $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de solutions périodiques de (E_f) .

On rappelle qu'une application ϕ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est périodique si, et seulement si, il existe T élément de $\mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x + T) = \phi(x)$. On dit alors que ϕ est T -périodique ou que T est une période de ϕ .

Partie A

Dans cette partie, on établit quelques propriétés des applications périodiques. Soit ϕ une application T -périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors ϕ' est T -périodique.
3. On considère l'ensemble suivant

$$P_\phi = \{t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \phi(x + t) = \phi(x)\}$$

Montrer que P_ϕ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Partie B Étude des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $G \cap]0, +\infty[$ n'est pas vide.
2. On pose $a = \inf(G \cap]0, +\infty[)$.
 - (a) On considère le cas où $a > 0$.
 - i. Montrer qu'alors a appartient à G (on pourra faire un raisonnement par l'absurde, en montrant que si a n'appartient pas à G il existe des éléments t_1 et t_2 de G tels que $a < t_2 < t_1 < 2a$ et en déduire une contradiction).
 - ii. Établir l'égalité $G = a\mathbb{Z}$.
 - (b) (*plus difficile, facultatif*) On considère le cas où $a = 0$. Prouver que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Partie C Étude du nombre de solutions périodiques de (E_f) dans trois cas simples.

1. Montrer que si (E_f) admet une solution T -périodique alors f est T -périodique. Que peut-on conclure dans le cas où f n'est pas périodique ?
2. Résoudre l'équation différentielle $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$. Prouver que la fonction nulle est la seule solution périodique de (E_0) .
3. Résoudre l'équation différentielle (E_c) suivante : $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \cos(x)$. Prouver que (E_c) admet une seule solution périodique que l'on déterminera.

Partie D

Dans cette partie, on suppose que f est continue et périodique. On veut établir que (E_f) admet une seule solution périodique.

1. Dans cette question, on prouve que (E_f) admet au moins une solution périodique.
 - (a) Soit T une période de f et y une solution de (E_f) . On considère l'application z de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(x + T)$.
 - i. Prouver que z est solution de (E_f) .
 - ii. Montrer que y est T -périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$ et $y'(0) = y'(T)$.
 - (b) Démontrer que (E_f) admet une solution périodique.
2. Dans cette question on prouve que (E_f) admet une seule solution périodique.
 - (a) Cas où P_f est dense dans $\mathbb{R}$.
 - i. Montrer que f est constante (on pourra établir que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$).
 - ii. Conclure.
 - (b) Cas où $P_f = a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

Soient y_1, y_2 des solutions périodiques de (E_f) , T_1 une période de y_1 , T_2 une période de y_2 .

 - i. Prouver que T_1 et T_2 sont des éléments de P_f .
 - ii. Montrer que y_1 et y_2 possèdent une période commune.
 - iii. En déduire que $y_1 = y_2$ (on utilisera la question 2 de la partie C).

Exercice

On note P_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\{0, 1\}$, tel qu'il n'y ait qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne.

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in P_n$. Montrer qu'il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = \delta_{\sigma(i)}^j$$

où δ désigne le symbole de Kronecker (si $k = \ell$, $\delta_k^\ell = 1$ et si $k \neq \ell$, $\delta_k^\ell = 0$)

2. Montrer que P_n est un groupe fini.
 3. Montrer que toute matrice de P_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
-