Devoir maison n° 12
MP
pour jeudi 5 février 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats.
Bon travail !

Exercice 1 – ✍

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$. On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire. On dit qu'un projecteur de E est *strict* s'il n'est ni l'endomorphisme nul, ni l'identité.

1. Soit p un projecteur de E.
   (a) Démontrer que $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.
   (b) Soit p un projecteur orthogonal.
      i. Montrer que pour tout x de E, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Pour quels vecteurs x a-t-on égalité ?
      ii. Montrer que pour tout x de E, $\langle p(x), x \rangle \geqslant 0$. Pour quels vecteurs x a-t-on égalité ?
   (c) Démontrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $p^* = p$.
2. On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$.
   (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Démontrer que M est la matrice d'un projecteur strict orthogonal de E dans une base orthonormée si, et seulement si, $\begin{cases} d & = 1-a \\ b & = c \\ a(1-a) & = b^2 \end{cases}$
   (b) Qu'impose cette dernière égalité pour la valeur de a ?
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ la matrice d'un projecteur strict orthogonal de E dans une base orthonormée. Calculer la matrice produit suivante :
   $$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$$
   Justifier que la matrice N est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (d) Soient p_1 et p_2 deux projecteurs orthogonaux stricts de E. Démontrer que l'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.
3. *Pour les étudiants à l'aise uniquement.*
   Soient p_1 et p_2 deux projecteurs orthogonaux stricts d'un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
   (a) Déterminer l'endomorphisme adjoint de $p_1 \circ p_2 \circ p_1$. En déduire que $p_1 \circ p_2 \circ p_1$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} p_1$ est stable par $p_1 \circ p_2 \circ p_1$.

(c) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} p_1$ est stable par l'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ et que celui-ci induit sur $\operatorname{Im} p_1$ un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.

(d) Soit $G = \operatorname{Im} p_1 + \ker p_2$. Démontrer que $G^\perp = \ker p_1 \cap \operatorname{Im} p_2$. Que vaut l'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ sur $G^\perp$?

(e) Démontrer que l'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.

(f) Soit r_2 le rang de p_2. Démontrer que $\operatorname{Tr}(p_1 \circ p_2) \leqslant r_2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 2 – ✍

Si A, B, C, D sont quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $M_{A,B,C,D}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par

$$M_{A,B,C,D} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

1. Soient A, B, C, D, E cinq matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
   (a) Exprimer la matrice produit $M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,0_n,I_n}$.
   (b) On suppose la matrice A inversible. Justifier l'égalité :
   $$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$
2. On suppose que les matrices A et C commutent.
   (a) On suppose la matrice A inversible. Démontrer que $\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB)$.
   (b) On ne suppose plus la matrice A inversible.
      i. Démontrer qu'il existe des matrices U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que le polynôme caractéristique de la matrice $M_{A,B,C,D}$ vérifie :
      $$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$$
      Exprimer U et V en fonction des matrices A, B, C et D.
      ii. Démontrer que $\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - BC)$.
3. Dans cette question, on suppose que $A = D = I_n$ et que B et B sont des matrices à coefficients réels tels que $C = B^\top$. On pose $S = M_{I_n,B,B^\top,I_n}$.
   (a) Justifier que $B^\top B$ est une matrice symétrique positive.
   (b) Exprimer le polynôme χ_S en fonction du polynôme $\chi_{B^\top B}$.
   (c) En déduire que la matrice S est une matrice symétrique définie positive si, et seulement si, les valeurs propres de la matrice $B^\top B$ sont toutes strictement inférieures à 1.
4. On considère la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par récurrence par :
   $$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n > 1,\ A_n = \begin{pmatrix} 2A_{n-1} & \mathrm{i}A_{n-1} \\ \mathrm{i}A_{n-1} & -2A_{n-1} \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer une relation de récurrence entre $\det(A_n)$ et $\det(A_{n-1})$ pour $n > 1$.
   (b) Exprimer $\det(A_n)$ en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.
   (c) Pour $n > 1$, exprimer le polynôme caractéristique χ_{A_n} de la matrice A_n en fonction de $\chi_{A_{n-1}}$ et $\chi_{-A_{n-1}}$.
   (d) Déterminer les valeurs propres de la matrice A_n pour $n \geqslant 1$.
