Devoir maison n° 11
MP
pour jeudi 29 janvier 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

Pour ce devoir, il est demandé de rendre au moins un des deux exercices.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note : $(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(. \mid .) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

4. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k.
11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
13. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.
14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser les questions 9 et 13.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$. On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

15. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.
17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0, \dots, P_n)$ la base canonique de E, où pour tout entier naturel k, $P_k = X^k$. Soit $(a_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose $(P|Q) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Pour $P \in E$, calculer $(P|P_0)$.

3. Pour $j \in [\![0,n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{k\in[\![0,n]\!],\ k\neq j} \dfrac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

   (a) Démontrer que, pour tout couple (i,j) de $[\![0,n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   (b) Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale.

   (c) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.

   (d) Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathcal{B}$.

   (e) Déterminer $\sum_{j=0}^{n} L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

   (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer $H^{\perp}$ et en déduire la dimension de H.

5. Soit Q un polynôme de E.

   (a) Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^{\perp}$.

   (b) Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.