**Devoir maison n° 10**
**MP**
*pour jeudi 22 janvier 2026*

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.*
*Bon travail !*

---

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

---

## Exercice 1 – ✍

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée $A$ pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$ : le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.
Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée $A$.
Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire $T$ définie de la façon suivante :

— si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$ ;

— sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire $T$ dans deux cas particuliers.

## Partie I - Préliminaires

### I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

**Q1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires $X_n$ et $S_n$ dans le contexte de la situation présentée ?

**Q2.** Que représente la variable aléatoire $T$ ?

### I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ définie par : $\quad \forall x \in ]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$

**Q3.** Montrer que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

**Q4.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.

**Q5.** Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction $f$ en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

## Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

### II.1 - Loi des variables aléatoires $S_n$ et $T$

**Q6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $S_n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $1/2$.

**Q7.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $T$ ?

**Q8.** Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction des événements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

**Q9.** Calculer $P(T = 0)$.

### Il.2 - Espérance de la variable aléatoire $T$

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice $G_T$ de la variable aléatoire $T$ est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ sur son intervalle de convergence.

**Q10.** Déterminer la rayon de convergence $R_T$ de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in ]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A$$

**Q11.** En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

## Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

### III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}$$

**Q12.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'événements $((X_{n+1} = 0), \ldots, (X_{n+1} = M-1))$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell)$$

**Q13.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_n \leqslant k\right) = \frac{1}{M^n}\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix}$$

### III.2 - Espérance de la variable aléatoire $T$

**Q14.** On suppose que $P(T = 0) = 0$.
Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ? En déduire que la variable aléatoire $T$ admet une espérance et calculer sa valeur.

---

Exercice 2 – ↯

Dans tout ce problème, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ son produit scalaire.

On pourra utiliser sans preuve les deux résultats suivants :

- le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure ;
- l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.

## A - Un exemple introductif

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On note $c_1$, $c_2$, et $c_3$ les colonnes de $P$ considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que la matrice $P$ est inversible. En déduire que la famille $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$ pour construire une base orthonormée $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $Q$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$. Justifier que $Q^{-1} = Q^T$.
4. Déterminer la matrice de passage $R$ de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$. On constate que $R$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.
5. Justifier que $P = QR$.

## B - Cas général : décomposition $QR$

6. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. En s'inspirant de la démarche mise en place sur l'exemple, montrer qu'il existe une matrice $Q$ orthogonale et une matrice $R$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $P = QR$.
7. Soit $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $P$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliquer l'intérêt de la décomposition $P = QR$, avec $Q$ orthogonale et $R$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, pour résoudre le système linéaire $Px = b$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$.

Les deux questions qui suivent permettent de démontrer l'unicité de la décomposition précédente.

8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. En raisonnant de proche en proche de la première à la dernière colonne de $M$, montrer que $M = I_n$.
9. On considère quatre matrices $Q_1$, $Q_2$, $R_1$, $R_2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $Q_1$ et $Q_2$ sont orthogonales, $R_1$ et $R_2$ sont triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs et $Q_1R_1 = Q_2R_2$. Montrer que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

### C - Décomposition d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$

10. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant la décomposition $QR$ d'une matrice inversible bien choisie, démontrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = QTQ^T$.
11. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et une décomposition $A = QTQ^T$ avec $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, mais non diagonale.
12. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et une décomposition $A = QTQ^T$ avec $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale à éléments diagonaux strictement positifs.

---