

Concours blanc – maths – sujet B (5/2)

MP

vendredi 7 novembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Dans tout le sujet, le corps \mathbb{K} sera \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1 \quad (N_1)$$

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice, notée \mathbf{e}^A , ou bien $\exp(A)$, définie par

$$\mathbf{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$f_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad t \mapsto f_A(t) = \mathbf{e}^{tA}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'_A(t) = A\mathbf{e}^{tA} = \mathbf{e}^{tA}A.$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors

$$\mathbf{e}^B = P^{-1}\mathbf{e}^A P.$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit leur **crochet de Lie** par

$$[A, B] = AB - BA.$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3.

1 Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1) Montrer que les matrices A et \mathbf{e}^B commutent.

On définit une application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{t(A+B)} \mathbf{e}^{-tB} \end{array}$$

2) Montrer que l'application g , et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy.

En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{t(A+B)} = \mathbf{e}^{tA} \mathbf{e}^{tB} \quad (1)$$

- 3** ▷ Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t , montrer que les matrices A et B commutent.
- 4** ▷ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, prouver la relation $\|\mathbf{e}^A\| \leq e^{\|A\|}$.
- 5** ▷ Montrer que $\det(\mathbf{e}^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

2 Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{e}^{\frac{1}{k}A} \mathbf{e}^{\frac{1}{k}B} \right)^k = \mathbf{e}^{A+B} \quad \text{ou} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right) \exp\left(\frac{1}{k}B\right) \right)^k = \exp(A+B) \quad (2)$$

Pour k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{1}{k}A\right) \exp\left(\frac{1}{k}B\right) \quad \text{et} \quad Y_k = \exp\left(\frac{1}{k}(A+B)\right).$$

- 6** ▷ Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \quad \text{et} \quad \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$$

On introduit la fonction

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & \mathbf{e}^{tA} \mathbf{e}^{tB} - \mathbf{e}^{t(A+B)} \end{array}$$

- 7** ▷ Montrer que

$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty$$

- 8** ▷ Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}$$

En déduire la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit groupe spécial linéaire :

$$\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, on introduit son algèbre de Lie :

$$\mathcal{A}_G = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{tM} \in G \right\}.$$

L'ensemble $\text{SL}_n(\mathbb{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\text{O}_n(\mathbb{R})$, sont bien des sous-groupes fermés de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

- 9** ▷ Déterminer \mathcal{A}_G lorsque $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

- 10** ▷ Si $G = \text{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

11 ▷ En utilisant la partie 2, montrer que \mathcal{A}_G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 ▷ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \mathbf{e}^{tA} \cdot B \cdot \mathbf{e}^{-tA} \end{array}$$

est à valeurs dans \mathcal{A}_G .

13 ▷ En déduire que \mathcal{A}_G est stable par le crochet de Lie, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}_G, \forall B \in \mathcal{A}_G, [A, B] \in \mathcal{A}_G.$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est tangente à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé espace tangent à G en I_n , et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.

On rappelle aussi que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 ▷ Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM)$.

En trigonalisant M , montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16 ▷ Montrer que la différentielle au point I_n de l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme linéaire "trace".

17 ▷ Montrer que, dans les cas particuliers $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β . On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18 ▷ Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel, puis \mathbf{e}^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pose $E = \mathbb{C}^n$. L'espace vectoriel E , identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$ (on rappelle que toutes les normes sur E sont équivalentes).

On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i, j) de la matrice \mathbf{e}^{tA} . Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_A(t) = \mathbf{e}^{tA} = (v_{i,j}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A , on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \ker((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}) = \ker((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}).$$

On posera aussi $\alpha = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{Re}(\lambda)$.

19 ▷ Montrer que, si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20 ▷ Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 ▷ En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : P est inversible, D est diagonale, N est nilpotente,

$$\begin{aligned} P &\text{ est inversible,} \\ D &\text{ est diagonale,} \\ N &\text{ est nilpotente} \\ ND &= DN \quad A = P(D + N)P^{-1} \quad \text{et} \quad \chi_A = \chi_D \end{aligned}$$

22 ▷ En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O\left(t^p e^{cxt}\right) \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

23 ▷ Étudier la réciproque de la question 19).

24 ▷ On suppose, *dans cette question seulement*, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} X = 0 \iff X = 0$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} P_s(X) &= \prod_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(A) \\ \text{Re}(\lambda) < 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda} \\ P_i(X) &= \prod_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(A) \\ \text{Re}(\lambda) > 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda} \\ P_n(X) &= \prod_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(A) \\ \text{Re}(\lambda) = 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda} \end{aligned}$$

et les sous-espaces $E_s = \ker(P_s(A))$, $E_i = \ker(P_i(A))$ et $E_n = \ker(P_n(A))$ de $E = \mathbb{C}^n$. Les indices s , i , n signifient respectivement stable, instable et neutre.

25 ▷ Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$, montrer que

$$E_s = \left\{ X \in E \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} X = 0 \right\}.$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que

$$E_i = \left\{ X \in E \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA} X = 0 \right\}.$$

26 ▷ Montrer que

$$E_n = \left\{ X \in E \mid \exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left\| e^{tA} X \right\|_E \leqslant C(1 + |t|)^p \right\}.$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de C^n tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA} X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

FIN DU PROBLEME