Concours blanc – mathématiques
MP
vendredi 7 novembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.
On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire tels que $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

Questions préliminaires

1. Prouver que pour tous réels a et b, $ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une application intégrable sur I.
3. Soit φ l'application qui au couple $(f,g) \in E^2$ associe le réel : $\varphi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$.
   Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \mid \rangle$.

Partie 1

Soit h élément de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_n^{n+1} h(t) \, \mathrm{d}t$.
   Prouver que : $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
5. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} h(a_n) = 0$.
   Indication : on pourra appliquer le théorème des bornes atteintes à $|h|$ sur $[n, n+1]$.

Partie 2

Soit F l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} t^2 [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ convergent. Soit $f \in F$.

6. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t) \, \mathrm{d}t$ convergent.
7. Établir l'égalité : $\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$.
   On pourra, par exemple, utiliser un résultat de la partie 1.

8. Démontrer
$$\left(\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2\,[f(t)]^2 \,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \,\mathrm{d}t\right) \qquad (*)$$
9. Déterminer toutes les applications $f \in F$ pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité $(*)$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note dans tout l'exercice : $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$, et A et B les deux polynômes
$$A = X^n - 1 \quad \text{et} \quad B = X^n - X$$

Questions préliminaires

1. Énoncer le théorème de division euclidienne pour les polynômes.
2. Déterminer, en posant la division, le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
3. Déterminer le PGCD des polynômes A et B.
4. Décomposer les deux polynômes A et B en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Les n racines distinctes de B seront notées $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ et z_n avec $z_n = 0$.

******

On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne du produit AP par B.

5. Prouver que f est un endomorphisme de E.
6. Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. En posant la division euclidienne, montrer que $f(X^k) = X^{k+1} - X^k$.
7. De la même façon, déterminer $f(X^{n-1})$.
8. En déduire la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ de E.
9. Calculer la trace de M.

Étude du noyau et de l'image de f

10. Justifier que le rang de M est égal à $n-1$.
11. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
12. Déterminer une base de $\ker f$.
13. Justifier que $\operatorname{Im} f = \{(X-1)P,\ P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$.
14. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

Éléments propres

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On note P_j le polynôme de E défini par
$$P_j = \frac{B}{X - z_j} = \prod_{k \in [\![1,n]\!],\ k \neq j} (X - z_k) \qquad \text{et} \qquad R_j = f(P_j)$$

15. Vérifier que $P_j(z_j) \neq 0$.
16. Montrer que les racines de P_j sont racines de R_j.
17. En déduire qu'il existe un scalaire λ_j tel que $R_j = \lambda_j P_j$. Que peut-on alors dire du polynôme P_j ?
18. Montrer que l'on a : $A(z_j) = \lambda_j$.
19. En déduire l'expression de λ_j à l'aide de z_j. On précisera la valeur de λ_n.
20. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
21. Retrouver la valeur de la trace de l'endomorphisme f.
22. Déterminer le polynôme caractéristique χ_f de l'endomorphisme f sous forme factorisée, puis développée.
23. En déduire le déterminant de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$.

Problème

Notations

— La suite complexe de terme général α_n est notée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (α_n) ou plus simplement α.

— La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.

Partie I

Dans cette partie, on note S_{AC} l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n$ converge **absolument**. On admet que S_{AC} est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. (a) Soit u une suite à termes strictement positifs tel que $\sum u_n$ converge. Montrer qu'il existe une suite α de réels positifs, tendant vers $+\infty$ en croissant, telle que la série $\sum \alpha_n u_n$ converge. On pourra utiliser la suite α définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \qquad \text{et } \alpha_0 = 0$$

où R_n est le reste de rang n de la série $\sum u_n$.

(b) Soit u une suite à termes strictement positifs tel que $\sum u_n$ diverge. Montrer de façon analogue, en considérant la suite α définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{S_{n-1}} + \sqrt{S_n}} \qquad \text{et } \alpha_0 = 0$$

où S_n est la somme partielle de rang n de la série $\sum u_n$, qu'il existe une suite α de réels positifs, tendant vers 0 en décroissant, telle que la série $\sum \alpha_n u_n$ diverge.

2. Normes sur S_{AC}.

(a) Soit α une suite **strictement** positive et majorée. Montrer que l'application N_α définie par

$$\forall u \in S_{AC}, \quad N_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$$

est bien définie et que c'est une norme sur S_{AC}.

(b) Soit α une suite strictement positive et majorée. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note δ^p la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang p qui vaut 1, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 1 & \text{si } n = p \end{cases}$$

Que vaut $N_\alpha(\delta^p)$?

(c) Dans cette question uniquement, on suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n = \frac{1}{n!}$$

Les normes N_α et N_β sont-elles équivalentes sur S_{AC} ?

(d) Soient α et β deux suites strictement positives et majorées. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N_α et N_β soient équivalentes.

Partie II

Dans cette partie, on considère une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

3. Dans cette question uniquement, on se donne $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$ et on suppose que $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer R_n pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que la série $\sum R_n$ converge et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n$.

4. Dans cette question uniquement, on se donne $\alpha > 1$ et on suppose que $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que
$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha} \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

   (b) En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   (c) Pour quelles valeurs de α, la série $\sum R_n$ converge-t-elle ?

   (d) Montrer que dans ce cas,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

5. Dans cette question uniquement, on se donne $a \in \mathbb{R}$ et on suppose que $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Que vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$? On ne demande pas de justification.

   (b) Justifier la série $\sum R_n$ converge et calculer sa somme.

6. Dans cette question, on suppose seulement u positive.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k = nR_n + \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

   (b) On suppose que la série $\sum R_n$ converge. Montrer que la série $\sum n u_n$ converge puis que la suite (nR_n) converge vers 0.

Partie III

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\mathrm{N}(A) = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}|$. On admet que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

7. (a) Montrer que pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\mathrm{N}(AB) \leqslant n\mathrm{N}(A)\mathrm{N}(B)$.

   (b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{N}(A^p) \leqslant n^{p-1}\mathrm{N}(A)^p$.

   (c) Montrer que la série $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} \dfrac{A^p}{p!}$ converge. On pose alors $\exp(A) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{A^p}{p!}$.

8. Dans cette question, on suppose $n = 3$ et on pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI$.

   (b) Déterminer deux suites α et β telles que
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \alpha_p A + \beta_p I$$

   (c) Déterminer deux réels λ et μ tels que $\exp(A) = \lambda A + \mu I$.

   (d) On pose $R_p = \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$. Montrer que la série $\sum R_p$ converge et calculer $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} R_p$ sous la forme $cA + dI$ où c et d sont deux réels.