Polycopié de mathématiques

– Formulaire –

MP – 2026 – 2027

Un grand merci à Bruno pour son accueil et pour son aide. Certaines annexes en fin de formulaire sont le fruit de son travail.

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales généralisées

1.1 Théorème fondamental du calcul intégral

Toute fonction continue sur un intervalle y admet une primitive. En particulier, si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.

1.2 Intégrale convergente

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$.
  L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si les *intégrales partielles* $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admettent une limite finie quand x tend vers b. La valeur de l'intégrale est alors notée $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ou $\int_{[a,b[} f$, et correspond à
  $$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

- Dans le cas où l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on appelle *reste* la fonction R définie sur $[a,b[$ par :
  $$R(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
  On a $\lim_{x\to b} R(x) = 0$.

- Intégrales de référence (1)

  Intégrales de Riemann en l'infini. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

  Intégrales de Riemann en $b_0 \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_a^{b_0} \frac{1}{(b_0 - t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

  Intégrales de Riemann en $a_0 \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_{a_0}^{b} \frac{1}{(t - a_0)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

  Intégrale exponentielle pour a réel, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$

- Soit F une primitive de f sur $[a, b[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si F admet une limite finie en b.

  La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a, b[$, de dérivée $-f$.

1.3 Propriétés des intégrales convergentes

On considère I **un intervalle de** $\mathbb{R}$**,** $\mathbf{a} = \inf \mathbf{I}$, $\mathbf{b} = \sup \mathbf{I}$. Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur I, d'intégrale convergente sur I.

- linéarité

  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

- fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

  Étant donné $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ convergent, et on a alors :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

- positivité et stricte positivité de l'intégrale

  — Si f est positive sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

  — Si $a < b$ et f est strictement positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

- nullité de l'intégrale

  Si f est continue, de signe constant sur I et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors : $\quad \forall t \in I,\ f(t) = 0.$

- croissance de l'intégrale

  Si $f \leqslant g$ sur I, alors $\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

- relation de Chasles

  Pour tout $c \in]a, b[$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

1.4 Calcul intégral

1.4.1 intégration par parties

On commencera par intégrer entre a et x pour effectuer l'intégration par parties sur un segment avant de passer à la limite. Autrement dit, on mènera les calculs sur les intégrales partielles, puis on passera à la limite.

1.4.2 changement de variable

- Cas d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment
  Soient f une fonction continue sur I et $\varphi : [c, d] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

  Dans la pratique, on mène les calculs sans revenir à la forme précédente.

- Cas d'une intégrale généralisée
  a et α désignent un réel ou $-\infty$, b et β désignent un réel ou $+\infty$.
  Soit f continue sur $]a, b[$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$.
  Les intégrales $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence :

  — si φ est croissante, $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

  — si φ est décroissante, $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = -\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

  Autrement dit, les intégrales avant et après changement de variables sont de même nature ; en cas de convergence, elles sont égales si φ est croissante, elles sont opposées si φ est décroissante.

1.5 Le cas particulier des intégrales de fonctions positives

- Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ et **positive**.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \text{la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a,b[$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

  Conformément au programme, on s'autorisera alors à écrire $\int_a^b f = +\infty$ et un calcul montrant que $\int_a^b f < +\infty$ vaut preuve de convergence, toujours dans le cas où f est POSITIVE.
- Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur I. Si l'intégrale de g sur I converge, alors l'intégrale de f sur I converge également.

1.6 Fonctions intégrables et espace $L^1(I,\mathbb{K})$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur I. On dit que f est *intégrable* sur I ou que l'intégrale de f sur I *converge absolument* si l'intégrale de $|f|$ sur I converge. On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Intégrales de référence (récapitulatif) α, a, a_0, b_0 sont des réels avec $a > 0$ et $a_0 < b_0$.

  Intégrales de Riemann en l'infini. $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a,+\infty[\Leftrightarrow \quad \alpha > 1$.

  Intégrales de Riemann en a_0, $b_0 \in \mathbb{R}$.

  $x \mapsto \dfrac{1}{|x-b_0|^\alpha}$ est intégrable sur $[a_0,b_0[\Leftrightarrow \quad \alpha < 1$.

  $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a_0)^\alpha}$ est intégrable sur $]a_0,b_0] \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$.

  Intégrale exponentielle $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \quad a > 0$.
- Inégalité triangulaire
  Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale de f sur I converge. De plus,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

  où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

1.7 Comment se ramener à une fonction de référence ?

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$.

- domination-négligeabilité
  - Si $f \underset{b}{=} O(g)$ et si g est intégrable sur $[a,b[$, alors f l'est aussi.
  - En particulier, si $f \underset{b}{=} o(g)$ et si g est intégrable sur $[a,b[$, alors f l'est aussi.

  Si $f(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^\alpha})$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
  Si $f(t) \underset{0}{=} o(\frac{1}{t^\alpha})$ avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur $]0,1]$.

- critère d'équivalence
  Si on a $f \underset{b}{\sim} g$, f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a,b[$.

1.8 Intégration des relations de comparaison

- référence intégrable et reste
  Soient f continue par morceaux sur $[a,b[$ et g **positive** et **intégrable** sur $[a,b[$.
  - Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
  - Si $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
  - Si $f(x) \underset{b}{=} O(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- référence non intégrable et intégrales partielles
  Soient f continue par morceaux sur $[a,b[$ et g **positive** et **non intégrable** sur $[a,b[$.
  - Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
  - Si $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
  - Si $f(x) \underset{b}{=} O(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

2.1 Normes et propriétés

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *norme* sur E toute application N définie sur vérifiant les propriétés :

  Valeurs positives : N est à valeurs réelles (attention : cela signifie que $N(x)$ doit exister dans $\mathbb{R}$) et positives

  Séparation : $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

  Homogénéité : $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

  Inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

- Les inégalités triangulaires
  Pour x et y vecteurs de E, la première inégalité triangulaire est :

  $$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

  et se généralise en, pour $x_1, \ldots, x_n$ vecteurs de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ scalaires,

  $$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|x_k\|$$

  et la deuxième inégalité triangulaire est :

  $$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x + y\|$$

- Espace $\mathbb{K}^n$
  Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

  $$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$$

  $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

- Espace de fonctions continues
  Pour $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on pose :

  $$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

$\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

La norme 1 est appelée *norme de la convergence en moyenne.*
La norme 2 est appelée *norme de la convergence (en moyenne) quadratique.*
La norme infinie est appelée *norme de la convergence uniforme.*

- Espace des fonctions bornées
Soit (E,N) un espace vectoriel normé et X un ensemble non vide.
Une fonction $f : X \to E$ est *bornée* lorsqu'il existe un réel $R \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout x de X, $N(f(x)) \leqslant R$.
L'ensemble $\mathcal{B}(X,E)$ des applications bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(X,E)$. On peut le munir de la norme infinie, ou *norme de la convergence uniforme*, donnée par :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} N(f(x))$$
Par exemple, l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ des suites complexes bornées est muni de la norme infinie
$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

- Espace produit d'espaces normés
Étant donné p espaces vectoriels normés (E_i,N_i) avec $1 \leqslant i \leqslant p$, on peut munir l'espace vectoriel produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ de la norme N définie par :
$$\forall x = (x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad N(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant p} N_i(x_i)$$

2.2 Un peu de topologie dans $(E,\|.\|)$ espace vectoriel normé

- Distance
On appelle *distance* associée à la norme $\|.\|$ l'application $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ telle que
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = \|y-x\|$$
On a les propriétés suivantes pour la distance d :
  - Séparation : $\forall x,y \in E,\ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
  - Symétrie : $d(x,y) = d(y,x)$
  - Inégalité triangulaire : $\forall x,y,z \in E,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$
  - La norme de x est sa distance au vecteur nul : $\|x\| = d(x,0_E)$
  - On a encore une fois la seconde inégalité triangulaire
  $\forall x,y,z \in E,\ |d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y)$.

- Distance à une partie
Pour A partie non vide de E et x dans E, on appelle *distance de x à A*, et on note $d(x,A)$, la quantité :
$$d(x,A) = \inf\{d(x,a),\ a \in A\} = \inf\{\|x-a\|,\ a \in A\}$$

- Boules
Soient $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. On appelle :
  - *boule ouverte* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$.
  - *boule fermée* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\}$.

- *sphère* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$.

Pour $a = 0$ et $r = 1$, on parle respectivement de boule unité ouverte, boule unité fermée et sphère unité.

- Ensemble borné, suite bornée, fonction bornée
On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé est *bornée* s'il existe une boule la contenant, ou, de manière équivalente,
$$\exists M > 0,\ \forall x \in A,\ \|x\| \leqslant M$$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite (u_n) est bornée s'il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leqslant R$$
L'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel de E.

Soit X un ensemble et $f : E \to X$ une application. On dit que f est bornée s'il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que
$$\forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leqslant R$$
L'ensemble des applications bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,E)$.

- Parties convexes
Une partie A de E est dite *convexe* si :
$$\forall (x,y) \in A^2,\ \forall t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in A$$
L'ensemble des points $\{tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]\}$ est appelé *segment* $[x,y]$.
Dire qu'une partie est convexe signifie qu'étant donné deux points de A, le segment reliant ces deux points est inclus dans A.
En première année, vous avez vu que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe.

2.3 Suites dans un espace vectoriel normé

2.3.1 convergence et divergence d'une suite

$(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$
On dit qu'elle diverge sinon.
Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)$ converge vers 0.
- La limite d'une suite u, lorsqu'elle existe, est unique, notée $\lim u_n$.
- Toute suite convergente est bornée.
- L'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et pour u et v suites convergentes de E et λ réel,
$$\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$$

- Convergence dans un espace produit
  Soit $(E_k, N_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ muni de la norme produit N.
  La suite $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}) \in E$ converge vers $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p) \in E$ pour la norme N si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $(u_n^{(k)})_n$ converge vers (ℓ_k) pour la norme N_k.
  Une suite définie sur un espace vectoriel normé produit converge si et seulement si chacune des suites composantes converge.
- Dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à celle de ses suites composantes dans une base. Plus précisément, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On peut écrire chaque terme dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de ses coordonnées (ou composantes).

$$a_n = \sum_{k=1}^{p} a_n^{(k)} e_k$$

  Étnat donné $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k \in E$, il est équivalent de dire :
  (i) la suite (a_n) converge vers ℓ
  (ii) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $(a_n^{(k)})_n$ converge vers ℓ_k.

2.3.2 valeurs d'adhérence

- On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
- On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E un élément de E qui est la limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
  De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
- Théorème des suites extraites
  Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La suite réelle (u_n) a pour limite a si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite a.

2.4 Comparaison de normes

- On dit que la norme N_2 est équivalente à la norme N_1 s'il existe α et β strictement positifs tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

  La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Théorème d'équivalence des normes en dimension finie : En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
- Propriétés inchangées par utilisation d'une norme équivalente : le caractère borné, la convergence/divergence et la limite des suites.

Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Révisions

3.1.1 définition et propriétés

- On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On peut lui associer la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad \text{le plus souvent } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{ou} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

  — si la suite (S_n) diverge, on dit que la série $\sum u_k$ diverge ;
  — si la suite (S_n) converge, on dit que la série $\sum u_k$ converge.

  Dans le cas où la série $\sum u_k$ converge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ est appelée *somme de la série* et est notée $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k$. On définit la suite $(R_n)_{n\geqslant n_0}$ des restes de la série par :

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

- linéarité
  Soient deux séries de terme général u_k et v_k convergentes, et λ et μ réels.
  Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente : $\sum(\lambda u_k + \mu v_k)$ converge.
  On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

- positivité et stricte positivité de la somme d'une série convergente

  — Si pour tout k, on a $u_k \geqslant 0$, alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \geqslant 0$.

  — Si pour tout k, on a $u_k > 0$, alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k > 0$.

— Si pour tout k, $u_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$, alors : pour tout k, $u_k = 0$.

- croissance de la somme pour des séries convergentes
  Soient $\sum u_k$ et $\sum w_k$ deux séries **convergentes** telles que pour tout k, $u_k \leqslant w_k$. On a :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$$
- convergence absolue
  La série $\sum u_k$ converge absolument lorsque $\sum |u_k|$ converge. Si une série converge absolument, alors cette série converge, et on a l'inégalité triangulaire :
$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

3.1.2 séries de référence

- séries de Riemann
  La série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- séries géométriques
  Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général z^k est appelée série géométrique (de raison z). Elle converge si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas, la somme de la série est :
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$
- série exponentielle
  Pour tout complexe z, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

3.1.3 comment utiliser les séries de référence pour étudier la nature d'une série ?

- Théorème de majoration-minoration
  On suppose que $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.
  — si la série de terme général a_n diverge alors la série de terme général b_n diverge ;
  — si la série de terme général b_n converge, alors la série de terme général a_n converge.
- Règle de domination
  On suppose que b_n est positif et que $a_n = O(b_n)$. Si la série de terme général b_n converge, alors la série de terme général a_n converge.
- Règle de négligeabilité
  On suppose que b_n est positif et que $a_n = o(b_n)$. Si la série de terme général b_n converge, alors la série de terme général a_n converge.
- Critère d'équivalence
  On suppose que b_n est positif et que $a_n \sim b_n$. La série de terme général a_n et la série de terme général b_n sont de même nature.

3.1.4 liens suite-série

- divergence grossière
  Si la série $\sum u_k$ converge, alors son terme général tend vers 0. Par contraposée, si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_k$ diverge. On parle dans ce cas de *divergence grossière*.
- télescopage
  La **suite** (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$ converge.

3.1.5 le critère des séries alternées

- On appelle *série alternée* toute série de la forme $\sum(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite réelle de signe constant.
- Théorème des séries alternées
  Si la suite (a_n) est décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
- Théorème spécial des séries alternées
  Si la suite (a_n) est décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge. De plus,

  $$|R_n| = |S - S_n| \leqslant a_{n+1}$$

  et R_n est du signe du premier terme « négligé », à savoir $(-1)^{n+1}a_{n+1}$.

3.2 Technique de comparaison série-intégrale

On considère une série $\sum f(n)$ où f est une fonction continue et monotone sur $\mathbb{R}^+$. On peut comparer les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple, f est croissante, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$:

$$f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1)$$

Puis par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$,

$$\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t$$

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k+1)$$

Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et celle de droite pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on obtient via la relation de Chasles :

$$f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a des résultats analogues lorsque f est décroissante.

Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes !

3.3 Règle de d'Alembert pour les séries numériques

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes non nuls à partir d'un certain rang et que :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$$

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, la série diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire, il faut chercher une autre façon d'étudier la série.

3.4 Sommation des relations de comparaison

- référence convergente positive et reste
  Soient $\sum u_n$ et $\sum w_n$ deux séries, telles que $\sum w_n$ est convergente et $w_n \geqslant 0$. On note respectivement $R_n(u)$ et $R_n(w)$ les restes de rang n de ces séries.
  - Si $u_n \sim w_n$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\quad R_n(u) \sim R_n(w)$.
  - Si $u_n = o(w_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\quad R_n(u) = o(R_n(w))$.
  - Si $u_n = O(w_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\quad R_n(u) = O(R_n(w))$.

  La propriété est encore valable si la suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang.
- référence divergente positive et sommes partielles
  Soient $\sum u_n$ et $\sum w_n$ deux séries, telles que $\sum w_n$ est divergente et $w_n \geqslant 0$. On note respectivement $S_n(u)$ et $S_n(w)$ les sommes partielles de rang n de ces séries.
  - Si $u_n \sim w_n$ alors la série $\sum u_n$ diverge et $\quad S_n(u) \sim S_n(w)$.
  - Si $u_n = o(w_n)$ alors $\quad S_n(u) = o(S_n(w))$.
  - Si $u_n = O(w_n)$ alors $\quad S_n(u) = O(S_n(w))$.

  La propriété est encore valable si la suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang.
- Théorème de Cesàro
  - Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite ℓ. On a :
  $$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
  - Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite divergente de limite $+\infty$. On a :
  $$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3.5 Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans toute cette section, $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

3.5.1 notion de convergence et premières propriétés

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On peut définir la série de terme général u_n comme on en a l'habitude pour les suites numériques.

- On appelle somme partielle de rang n le terme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- Lorsque la suite (S_n) converge (ce qui est indépendant de la norme choisie puisque nous travaillons en dimension finie), on dit que la série de terme général u_n converge et on appelle somme de la série la limite de la suite (S_n). On note cette limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Cette somme est un élément de E, autrement dit un polynôme, une matrice, un endomorphisme...
  On peut encore définir le reste de rang n de la série, et ce reste tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
- Les propriétés et situations classiques suivantes sont encore valables :
  — linéarité de la somme de séries convergentes,
  — si $\sum u_n$ converge alors u_n tend vers 0 (et on parle encore de divergence grossière si u_n ne tend pas vers 0),
  — télescopages, liens suite-série.

3.5.2 deux apports majeurs de la dimension finie

- utilisation d'une base
  Si E est muni d'une base $(e_1, \dots, e_p)$, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries de ses coordonnées, $\sum u_n^{(k)}$ pour $k \in [\![1, p]\!]$, convergent. Auquel cas :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(1)}\right) e_1 + \cdots + \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)}\right) e_p$$
- On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série **numérique** $\sum \|u_n\|$ converge.
  Une série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.
  Et dans ce cas, on a l'inégalité triangulaire :
$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|$$

3.5.3 série exponentielle de matrices

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge. Sa somme est appelée exponentielle de A et est notée :
$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Chapitre 4

Familles sommables et procédés de sommation

4.1 Ensembles au plus dénombrables

- Un ensemble E est *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$. L'entier n est alors appelé cardinal de E et noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$. Concrètement, il s'agit du nombre d'éléments de E. Par convention, $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$.
- Un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$. L'ensemble E est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.
- Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Les ensembles suivants ne sont pas dénombrables : $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$.

4.2 Familles sommables de réels positifs

Jusqu'à la fin du chapitre, I désigne un ensemble dénombrable.

- Conventions de calculs dans $[0, +\infty]$
  - La propriété de la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ énonce que toute partie A de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure, notée $\sup(A)$, qui peut valoir $+\infty$. Quand A est majorée, cette borne supérieure est égale à la borne supérieure définie dans $\mathbb{R}$, et quand A n'est pas majorée, la borne supérieure est $+\infty$. Quand A est vide, dans $[0, +\infty]$, $\sup(A) = 0$.
  - Par convention, dans $[0, +\infty]$, $0 \times \infty = 0$. On a $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, et pour $a > 0$, $a \times (+\infty) = +\infty$. Les autres règles de calcul sont inchangées.
  - Pour $k \in \mathbb{R}^+$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

- Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille à termes positifs. On appelle *somme de la famille*, et on note $\sum_{i \in I} u_i$, la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble $\left\{ \sum_{j \in J} u_j, \quad J \text{ partie finie de } I \right\}$. On dit que la

famille est *sommable* si $\sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$.

- Quelle que soit φ bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$
Quelle que soit la façon d'indicer les termes présents dans la suite u, la somme de ces termes a une valeur commune, qu'on note $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, somme de la famille et somme de la série sont égales :
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$$
- Nous conservons, avec plus de liberté (puisque certaines quantités peuvent valoir $+\infty$), certaines pratiques :
$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i \qquad \text{et pour } \lambda \geqslant 0,\ \sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i$$
ainsi que le théorème de majoration : si $0 \leqslant u_i \leqslant w_i$ et si la famille $(w_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.
À condition de travailler avec des termes positifs, on peut calculer, regrouper les termes comme on le souhaite, sommer dans l'ordre qu'on veut quand il y a plusieurs indices, et justifier a posteriori la sommabilité de la famille. Deux façons de faire sont fréquentes :
La sommation par paquets : Si les $(I_k)_{k\in K}$ forment une partition de I, on a :
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} u_i$$
Le théorème de Fubini positif :
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

4.3 Familles sommables de nombres complexes

- La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est une famille sommable de nombres positifs.
- Parties positive et négative d'un réel
Pour x réel,
$$x^+ = \max(x,0) = \frac{x+|x|}{2} \qquad \text{est la partie positive de } x$$
$$x^- = \max(-x,0) = \frac{|x|-x}{2} \qquad \text{est la partie négative de } x$$
Par exemple, la partie positive de $7,3$ est $7{,}3$ (et sa partie négative est nulle) et la partie négative de $-5,24$ est $5,24$ (et sa partie positive est nulle). On a
$$x = x^+ - x^-$$

- On définit alors les sommes des familles sommables.
  - Pour $(u_i)_{i\in I}$ famille de **réels**, la famille est sommable si, et seulement si, les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ le sont. La somme est :
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$
  - Pour $(u_i)_{i\in I}$ famille de **complexes**, la famille est sommable si, et seulement si, les familles de réels $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables, et on a :
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + \mathrm{i}\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$$
- En présence de familles sommables, nous conservons les propriétés suivantes :
  — la linéarité, l'inégalité triangulaire,
  — l'invariance de la somme par permutation des termes
  — toute sous-famille d'une famille sommable est encore sommable,
  — la sommation par paquets,
  — le théorème de Fubini.

4.4 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On appelle *produit de Cauchy* de ces deux séries, la série de terme général c_n défini par
$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$
Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy converge absolument et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Chapitre 5

Suites et séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

5.1 Suites de fonctions

5.1.1 modes de convergence

- On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement* sur I vers la fonction f sur I si

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

- On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément* sur I vers la fonction f sur I si à partir d'un certain rang, la fonction $f_n - f$ est bornée sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

- La convergence uniforme entraîne la convergence simple : si la suite de fonctions(f_n) converge uniformément vers la fonction f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I. La réciproque est fausse.

5.1.2 convergence uniforme, continuité et double limite

- Théorème de transmission de continuité
  Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers la fonction f sur I et soit $a \in I$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.
  En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur I est continue sur I.
- Théorème de la double limite
  Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers la fonction f sur I et soit a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n en a, alors ℓ_n admet une limite ℓ et la fonction f admet une limite en a, et ces deux limites sont égales, ce qui correspond à l'inversion de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

5.1.3 convergence uniforme et intégration sur un segment

- Théorème d'interversion limite - intégrale
  Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ convergeant uniformément sur le segment $[a,b]$. On a l'interversion limite - intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

- Théorème d'interversion limite - primitive
  Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément vers la fonction f sur tout segment de I. Soit $a \in I$. On note F_n et F les primitives respectives de f_n et f sur I s'annulant en a :

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

  Alors la suite de fonctions (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.

5.1.4 convergence uniforme et dérivation

- Théorème d'interversion limite - dérivation
  Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si
  - (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I,
  - (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I,

  alors
  - (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I,
  - f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
  - $f' = g$.

  L'hypothèse de convergence uniforme porte sur la suite (f_n') et non (f_n).

- Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si
  - pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I
  - $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I,

  alors
  - la limite simple f de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
  - pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément vers $f^{(j)}$ sur tout segment de I.

5.2 Séries de fonctions

La série de terme général f_n, notée $\sum f_n$, désigne la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

5.2.1 modes de convergence

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I si la suite de ses sommes partielles (S_n) converge simplement (respectivement uniformément) sur I. On note dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$. Et on peut considérer la fonction reste de rang n, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si, et seulement si :
  - la série converge simplement sur I,
  - la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I lorsque :
  — les fonctions f_n sont toutes bornées sur I,
  — la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

5.2.2 théorèmes d'inversion

- Transmission de continuité
  Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément sur I et soit $a \in I$.
  Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.
  Ainsi, si une série de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, sa somme est également continue sur I.
- La convergence uniforme sur tout segment inclus dans I assure la continuité sur tout segment inclus dans I, donc la continuité en tout point de I, donc la continuité sur I.
- Théorème d'interversion somme - limite
  Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a point adhérent à I ou $a = \pm\infty$, alors la série $\sum \ell_n$ converge et :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

- Théorème d'intégration terme à terme
  Supposons que les f_n sont continues sur $[a, b]$.
  Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série $\sum \int_a^b f_n$ converge et on a l'interversion :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$$

- Théorème de dérivation terme à terme
  Supposons que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si :
  - la série $\sum f_n$ converge simplement sur I,
  - la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a l'interversion :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

De plus, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

- Théorème de dérivation terme à terme (généralisation)
  Supposons que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I (où $p \geqslant 1$). Si :
  - pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I,
  - la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I,

  alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et on a l'interversion :

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

5.3 Approximation uniforme

5.3.1 approximation par des fonctions en escalier

- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,
  - $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
  - $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}.

  La subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ est dite adaptée à f.
- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.
- Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers f.
  « Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ ».

5.3.2 approximation par des fonctions polynomiales

Théorème de Weierstrass
Toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Chapitre 6

Topologie des espaces vectoriels normés

6.1 Notions topologiques

6.1.1 voisinages, ouverts, fermés

- Soit $a \in E$ et $r > 0$. On appelle :
  - *boule ouverte* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$.
  - *boule fermée* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\}$.
  - *sphère* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$.

- Soient A une partie de E et x un élément de E . On dit que :
  - A est un *voisinage* de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.
  - A est *un ouvert* de E si A est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire si :
  $$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$$
  - A est *un fermé* de E si son complémentaire est un ouvert.
- Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé.
- Toute union d'ouverts est un ouvert. Une union **finie** de fermés est un fermé.
  Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert. Toute intersection de fermés est un fermé.
- Soient $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On munit l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme produit.
  - Si $U_1, \ldots, U_p$ sont des ouverts de $E_1, \ldots, E_p$ respectivement, alors $U_1 \times \cdots \times U_p$ est un ouvert de $E_1 \times \cdots \times E_p$.
  - Si $U_1, \ldots, U_p$ sont des fermés de $E_1, \ldots, E_p$ respectivement, alors $U_1 \times \cdots \times U_p$ est un fermé de $E_1 \times \cdots \times E_p$.
- Caractérisation séquentielle des fermés
  Une partie A de E est fermée si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.

6.1.2 intérieur, adhérence, frontière

- Soient A une partie de E et x un élément de E.
  - x est un *point intérieur* à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$, c'est-à-dire si A est un voisinage de x.

  - x est un *point adhérent* à A si pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
- Soit A une partie de E.
  — On appelle *intérieur* de A et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
  — On appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
  — On appelle *frontière* de A et on note $\mathrm{Fr}(A)$, l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.
- L'intérieur de A est un ouvert de E, c'est le plus grand des ouverts inclus dans A.
- L'adhérence de A est un fermé de E, c'est le plus petit des fermés contenant A.
- La frontière de A est un fermé de E.

- On a $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.
- A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$, et que A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

- Caractérisation séquentielle des points adhérents
  Un point x de E est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.
  Reformulons : l'adhérence de A est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A.
- Si l'espace vectoriel E est muni de deux normes N et N' équivalentes, alors (E, N) et (E, N') ont les mêmes voisinages, ouverts, fermés, intérieurs et adhérences.

6.1.3 parties denses dans E

On dit que A est *une partie dense dans* E quand l'adhérence de A est égale à E.

6.1.4 topologie relative à une partie

- On dit qu'une partie V de A est un voisinage relatif de a dans A quand c'est l'intersection d'un voisinage de a dans E avec A.

$$V = A \cap \mathcal{V} \quad \text{avec } \mathcal{V} \text{ voisinage de } a \text{ dans } E$$

- On dit qu'une partie Ω de A est un ouvert relatif de A quand Ω est voisinage relatif de chacun de ses points, ou de manière équivalente, si Ω est l'intersection d'un ouvert de E avec A :

$$\Omega = A \cap \mathcal{U} \quad \text{avec } \mathcal{U} \text{ ouvert de } E$$

- On dit qu'une partie F de A est un fermé relatif de A quand c'est le complémentaire dans A d'un ouvert relatif de A, ou de manière équivalente, si F est l'intersection d'un fermé de E avec A :

$$F = A \cap \mathcal{F} \quad \text{avec } \mathcal{F} \text{ fermé de } E$$

6.2 Étude locale d'une application dans un espace vectoriel normé, continuité

6.2.1 limite

- Soit $f : A \subset E \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. On dit que f a pour limite ℓ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

  Lorsqu'elle existe, la limite est unique.
  On note $\lim\limits_{a} f = \ell$, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
  On aurait pu présenter la définition avec des inégalités larges.

- L'application f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a, on a $\lim f(u_n) = \ell$.
  En conséquence, on a facilement les propriétés :
  - limite d'une combinaison linéaire : $\lim\limits_{a}(\lambda f + \mu g) = \lambda \lim\limits_{a} f + \mu \lim\limits_{a} g$
  - limite d'une composée
  - le théorème d'encadrement : si $\|f(x) - \ell\| \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{a} g = 0$, alors $\lim\limits_{a} f = \ell$
  - quand f est à valeurs réelles, le passage à la limite dans une inégalité large
  - quand f est à valeurs complexes, le produit, le quotient à dénominateur ne s'annulant pas.

- Soit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ le produit des espace vectoriels normés (F_k, N_k), muni de la norme produit : $N(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} N_i(x_i)$. On considère $f : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ et $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in F$. f admet une limite en a si, et seulement si, chaque fonction composante f_k admet une limite en a. Et

$$\lim_a f = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lim_a f_i = \ell_i$$

- Limite infinie pour une fonction réelle
  Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A.
  - On dit que f tend vers $+\infty$ en a si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant M$$

  - On dit que f tend vers $-\infty$ en a si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant M$$

- Limite quand $\|x\| \to +\infty$
  Soit $f : A \subset E \to F$ avec A partie non bornée.
  On dit que f tend vers ℓ quand $\|x\| \to +\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in A,\ \|x\| \geqslant K \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

  On note $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell$.
- Limite en $\pm\infty$ quand $A \subset \mathbb{R}$

- Si $-\infty$ est adhérent à A (cas où A n'est pas minorée), on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant K \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

- Si $+\infty$ est adhérent à A (cas où A n'est pas majorée), on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant K \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

- Je vous laisse définir, quand f est à valeurs réelles, $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = -\infty$.
  On peut également donner une caractérisation séquentielle de la limite dans chacun de ces cas, avec les conséquences qui en découlent.

6.2.2 continuité

- Soit f une application d'une partie D de E à valeurs dans F.
  - Lorsque a appartient à D, on dit que f est continue au point a quand $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
  - On dit que f est continue sur D quand elle est continue en tout point de D.
  - Lorsque a n'appartient pas à D et que f admet une limite ℓ en a, on dit que f se prolonge par continuité en a.
- Les résultats établis sur les limites nous apportent la continuité : d'une combinaison linéaire d'applications continues, du produit d'une application continue avec une application scalaire continue, de la composée d'applications continues, de l'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas (cas où f est à valeurs dans $\mathbb{K}$). Nous avons aussi l'adaptation de la caractérisation séquentielle de la continuité : f est continue en a si pour toute suite (x_n) d'éléments de A tendant vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

- Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
- Soit $k \geqslant 0$. On dit que l'application f est k-lipschitzienne ou lipschitzienne de rapport k si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

- Toute application lipschitzienne est continue.

6.2.3 continuité uniforme

- On dit que f est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

  On peut énoncer la définition avec des inégalités strictes ou larges. On a les implications :

$$\boxed{f \text{ lipschitzienne}} \ \Rightarrow\ \boxed{f \text{ uniformément continue}} \ \Rightarrow\ \boxed{f \text{ continue}}$$

  Les réciproques sont fausses.

6.2.4 images réciproques et continuité

- Soit $f : A \subset E \to F$ une application continue.
  - L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A.
  - L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A.

- En particulier, pour $f : E \to F$ continue, l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert de E, l'image réciproque d'un fermé est un fermé de E.

6.3 Applications linéaires et multilinéaires continues et normes d'opérateurs

6.3.1 critère de continuité des applications linéaires

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. u est continue si et seulement s'il existe C réel positif tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$$

6.3.2 espace $\mathscr{L}_c(E,F)$ et norme subordonnée

- On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. $\mathscr{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.
- Soient E et F des espaces vectoriels normés et $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Alors les trois bornes supérieures suivantes sont finies et égales :

  $$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

  On note $|||u|||$ ou $\|u\|_{\text{op}}$ leur valeur commune.

  L'application $u \in \mathscr{L}_c(E,F) \mapsto |||u|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ appelée *norme d'opérateur* ou *norme subordonnée* aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.
- Si $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$, $\quad \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant |||u|||.\|x\|$.
- $|||.|||$ est *sous-multiplicative*. Pour $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}_c(F,G)$, on a

  $$|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||$$

- Supposons $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ munis d'une norme.
  On appelle *norme subordonnée* de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et on note $|||A|||$, la norme de l'application linéaire canoniquement associée à A. $|||.|||$ définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On a

  $$|||A||| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\|\leqslant 1} \|AX\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

- On a $|||I_n||| = 1$.
- $|||.|||$ est sous-multiplicative. Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|||AB||| \leqslant |||A|||.|||B|||$.

6.3.3 applications multilinéaires

- $E_1, E_2, \dots, E_p$ et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni de la norme produit.
  On rappelle qu'une application $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est *multilinéaire*, ou *p-linéaire*, si elle est linéaire en chacune de ses variables, c'est-à-dire que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ et tout $i \in [\![1, p]\!]$,
  $$y \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) \quad \in \mathscr{L}(E_i, F)$$
- Critère de continuité des applications multilinéaires
  Une application multilinéaire $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue si, et seulement s'il existe $C \geqslant 0$ tel que :
  $$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\| \leqslant C \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_p\|$$
- Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont de dimension finie, toute application multilinéaire $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue.

6.4 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

6.4.1 notion de compacité

- Nous avons vu dans le chapitre Espaces vectoriels normés qu'on appelle :
  — suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
  — valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite de sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé E est une *partie compacte* ou *un compact* si toute suite d'éléments de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A.
  On peut reformuler : A est compacte si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge dans A.
- Toute partie compacte est fermée et bornée.
- Tout fermé inclus dans un compact est compact.
- Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.
- Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels normés et $A_1, \dots, A_p$ des compacts de $E_1, \dots, E_p$ respectivement. Alors $A_1 \times \cdots \times A_p$ est un compact de l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$.

6.4.2 continuité et compacité

- L'image d'un compact par une application continue est un compact.
- Théorème des bornes atteintes
  Toute fonction continue sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.
- Théorème de Heine
  Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

6.5 Espaces vectoriels normés de dimension finie

6.5.1 équivalence des normes en dimension finie

Théorème : Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

6.5.2 compacts en dimension finie

- Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés. Nous en déduisons par exemple :
  - En dimension finie, la boule unité fermée et la sphère unité sont compactes.
  - Toute application continue sur un fermé borné en dimension finie et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
  De toute suite bornée d'un espace vectoriel F de dimension finie, on peut extraire une sous-suite convergeant dans F.

- Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace de dimension finie est fermé.

6.5.3 continuité des applications (multi)linéaires et polynomiales

- Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.
- Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie, toute application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue.

- On appelle :
  - *monôme* sur $\mathbb{K}^p$ toute application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ de la forme
    $$(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p} \text{ où les } n_i \text{ sont entiers naturels}$$
  - *fonction polynomiale* sur $\mathbb{K}^p$ toute combinaison linéaire de monômes.
- Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On appelle :
  - *monôme* sur E toute application $f : E \to \mathbb{K}$ de la forme
    $$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \mapsto x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p} \text{ où les } n_i \text{ sont entiers naturels}$$
  - *fonction polynomiale* sur E toute combinaison linéaire de monômes.
- Toute application polynomiale d'un espace vectoriel de dimension finie est continue.

6.6 Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

- Soit $(a, b) \in E^2$. On appelle *chemin (ou arc) continu* joignant a à b toute application continue γ de $[0, 1]$ dans E telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
- Une partie A de E est *connexe par arcs* si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe un chemin continu joignant a à b à valeurs dans A.

- On définit : $a \mathcal{R} b$ s'il existe un chemin continu à valeurs dans A joignant a et b. La relation binaire ainsi définie est une relation d'équivalence.
  Les classes d'équivalence sont les *composantes connexes par arcs.*
- Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Soient $f : E \to F$ une application continue et A une partie connexe par arcs de E. Alors $f(A)$ est connexe par arcs.
- Théorème des valeurs intermédiaires généralisé
  Pour $f : E \to \mathbb{R}$ une application, l'image de toute partie connexe par arcs est un intervalle.

6.7 Suites et séries de fonctions dans un e.v.n. de dimension finie

Dans ce paragraphe, A désigne une partie d'un espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie et F un espace vectoriel de dimension finie.
On rappelle que F étant de dimension finie, toutes les normes sur F sont équivalentes ; on en choisit une notée $\|.\|$.
On rappelle que la norme uniforme sur l'ensemble des fonctions bornées de A dans F est définie par

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in A} \|g(x)\|$$

6.7.1 modes de convergence

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et à valeurs dans F.

Pour les suites de fonctions :

- (f_n) converge simplement vers f sur A si : $\forall x \in A, \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = f(x)$.
- (f_n) converge uniformément vers f sur A si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Pour les séries de fonctions :

- $\sum f_n$ converge simplement sur A si : $\forall x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge, c'est-à-dire que la suite de ses sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Pour $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge absolument si la série $\sum \|f_n(x)\|$ converge.
- $\sum f_n$ converge uniformément sur A si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A $(*)$.
- $\sum f_n$ converge normalement sur A si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

6.7.2 limite et continuité

- **Théorème de double limite**
  Pour les suites de fonctions :
  Soient (f_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers f sur A et a un point adhérent à A. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite $\ell_n \in F$ en a, alors la suite (ℓ_n) possède une limite en ℓ et on a l'interversion de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Pour les séries de fonctions (interversion somme - limite) :
Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a point adhérent à A (ou $a = \pm\infty$ dans le cas $E = \mathbb{R}$), alors la série $\sum \ell_n$ converge et :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

- **Théorème de transmission de continuité**
  - Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur A à valeurs dans F convergeant uniformément vers f sur A, alors f est continue sur A.
  - Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur A à valeurs dans F convergeant uniformément, alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

6.8 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie

En annexe.

Chapitre 7

Séries entières

7.1 Généralités

7.1.1 rayon de convergence

- On appelle *série entière* toute série de fonctions de la variable complexe ou réelle de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Le domaine de convergence est l'ensemble de définition, dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, de la fonction
$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
- Lemme d'Abel
Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure :
$$R = \sup\{\, t \in \mathbb{R}^+ \mid \text{la suite } (a_n t^n) \text{ est bornée}\}$$
On a $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
- Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$.
  — Si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
  — Si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
  — Si $|z| = R$, on ne peut rien dire.
  Ainsi, si $\sum |a_n z^n|$ converge, alors $R \geqslant |z|$, et si $\sum |a_n z^n|$ diverge, alors $R \leqslant |z|$.
$$R = \sup\{\, t \in \mathbb{R}^+, \text{ la série } \sum a_n t^n \text{ converge absolument}\}$$

7.1.2 détermination pratique du rayon de convergence

Quelques pistes :

- ▶ utilisation de séries $\sum a_n z_0^n$ connues, pour encadrer R
- ▶ utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries entières
- ▶ utilisation de comparaisons ($a_n \sim b_n$, $a_n = O(b_n)$)
- ▶ utilisation de séries dérivées.

- Règle de d'Alembert adaptée aux séries entières
  On suppose que les coefficients a_n sont non nuls à partir d'un certain rang et que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
  — Si $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, $R = \frac{1}{\ell}$.
  — Si $\ell = 0$, $R = +\infty$.
  — Si $\ell = +\infty$, alors $R = 0$.

- Comparaison de séries entières
  Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
  - Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.
  - Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
  - Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

- Séries entières dérivées
  Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z$ ont même rayon de convergence.
  Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k a_n z$ ont même rayon de convergence.

7.1.3 opérations algébriques sur les séries entières

- Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
  Soit R le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$. On a

$$R \geqslant \min(R_a, R_b)$$

  et si $R_a \neq R_b$, on a $R = \min(R_a, R_b)$.
- Le *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

  Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Soit R le rayon de convergence du produit de Cauchy de ces séries.
  On a $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et

$$\text{pour } |z| < \min(R_a, R_b) \leqslant R, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right)$$

  où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ i+j=n} a_i b_j$.

7.1.4 continuité

- Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.
- La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.

- Théorème d'Abel radial
  Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence R. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

7.1.5 dérivation terme à terme, intégration

- La fonction somme d'une série entière de la variable réelle, $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Les dérivées d'ordre p de f s'obtiennent en dérivant terme à terme. Pour $x \in]-R, R[$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ \text{pour } p \in \mathbb{N},\ f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} \end{aligned}$$
  En particulier, $\quad a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

- Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R. On peut intégrer terme à terme de 0 à t, pour $t \in]-R, R[$:
$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

7.2 Développements en séries entières

7.2.1 généralités (variable complexe)

- Une fonction f de la variable réelle est *développable en série entière* sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R avec $R \geqslant r$ telle que :
$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
  Une fonction f de la variable complexe est *développable en série entière* sur $D(0, r)$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R avec $R \geqslant r$ telle que :
$$\forall z \in D(0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

- Unicité du développement en série entière
  Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence strictement positifs. On suppose que ces séries entières coïncident sur un intervalle $]0, r[$ non vide :

$$\forall x \in]0, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

  Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

7.2.2 développements usuels dans le domaine réel

En annexe.

7.2.3 méthode de l'équation différentielle linéaire

1. On détermine une équation différentielle satisfaite par notre fonction f, avec conditions initiales.
2. Par analyse-synthèse, on détermine une série entière S solution du problème. On est amené dans notre travail à une relation de récurrence entre les coefficients.
3. On utilise un résultat d'unicité des solutions à un problème de Cauchy. On obtient $f = S$.

Chapitre 8

Intégrales dépendant d'un paramètre

8.1 Théorèmes de passage à la limite sous le signe intégral

8.1.1 théorème de convergence dominée

- Théorème de convergence dominée
  Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :
  - la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux
  - il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

  Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur I et on a :

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$$

  Conformément au programme, pour l'application pratique du théorème de convergence dominée, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination mais pas les hypothèses de continuité par morceaux.
- Extension du théorème de convergence dominée à une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$
  Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions indexées par un intervalle J de $\mathbb{R}$, continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. Soit λ_0 un point adhérent à J. On fait les hypothèses suivantes :
  - il existe une fonction f continue par morceaux sur I telle que pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t) = f(t)$
  - il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant

$$\forall \lambda \in J,\ \forall t \in I,\ |f_\lambda(t)| \leqslant \varphi(t)$$

  Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur I et on a :

$$\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \int_I f$$

8.1.2 le cas particulier des séries de fonctions

- Théorème d'intégration terme à terme – cas positif
  Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs **positives**, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et telle que sa somme soit continue par morceaux sur I.

  Alors, dans $[0,+\infty]$, on a :
  $$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
  En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

- Théorème d'intégration terme à terme – cas $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$
  Soit (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et telle que sa somme soit continue par morceaux sur I. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$, alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et
  $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

8.2 Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

8.2.1 continuité

Théorème de continuité sous le signe intégral
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé et f une fonction définie sur $A \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, $f(.,t)$ est continue,
- pour tout $x \in A$, $f(x,.)$ est continue par morceaux,
- hypothèse de domination : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que
  $$\forall x \in A,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.
Comme la continuité est une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur A par la domination sur tout compact de A. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la domination sur tout segment de A, ou sur toute famille d'intervalles adaptée à la situation.

8.2.2 dérivabilité

- Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que :
  — pour tout $t \in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,
  — pour tout $x \in J$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I,

— pour tout $x \in G$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ;

— il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de J, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right| \leqslant \varphi$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

L'hypothèse de domination ne portant que sur $\frac{\partial f}{\partial x}$, il ne faut pas oublier l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ pour être bien assuré de l'existence de $g(x)$.

- On peut étendre le théorème précédent à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|$ et d'intégrabilité des $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Chapitre 9

Fonctions vectorielles de la variable réelle

9.1 Limites et continuité (révisions)

- f admet la limite ℓ en t_0, et on note $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = \ell$, lorsque $\|f(t) - \ell\| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$, soit encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in I,\ |t - t_0| < \alpha \ \Rightarrow\ \|f(t) - \ell\| < \varepsilon$$

- Dans E muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$, $f : t \mapsto f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_p(t)e_p$ admet la limite $\ell = \ell_1 e_1 + \cdots + \ell_p e_p$ quand t tend vers t_0 si, et seulement si, chacune des composantes $f_i(t)$ admet la limite ℓ_i quand t tend vers t_0.
- f est continue en t_0 lorsque $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$. f est continue sur I si f est continue en tout point de I. Cela revient à demander la continuité de chacune de ses composantes.

9.2 Dérivabilité

9.2.1 définitions

- f est dérivable en t_0 si la quantité $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite quand t tend vers t_0. Le vecteur limite : $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ est alors appelé vecteur dérivé en t_0. On le note $f'(t_0)$.
  f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point t_0 de I. Sa fonction dérivée est alors $f' : t \mapsto f'(t)$.
- La dérivabilité de f se traduit par la dérivabilité des fonctions composantes : dans E muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$, $f : t \mapsto f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_p(t)e_p$ est dérivable sur I si, et seulement si, ses composantes sont dérivables sur I. On a alors :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = f_1'(t)e_1 + f_2'(t)e_2 + \cdots + f_p'(t)e_p$$

- Pour g définie sur un voisinage de t_0 et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on dit que f est *négligeable* devant g en t_0, et on note $f \underset{t_0}{=} o(g)$ lorsque $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.
- f est dérivable en t_0 si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0. Dans ce cas, le développement limité est :

$$f(t) \underset{t_0}{=} f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

9.2.2 opérations sur les dérivées

- Une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I. Pour f, g fonctions dérivables sur I et à valeurs dans E, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- Le produit d'une fonction dérivable sur I par une fonction scalaire dérivable sur I est dérivable sur I. Pour $f : I \to E$ et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivables, on a $(\lambda.f)' = \lambda'.f + \lambda.f'$.
- Si $u : \mathbb{R} \to I$ est dérivable, la composée $f \circ u$ est dérivable et on a $(f \circ u)' = u'.\ f' \circ u$.
- Composition avec une application linéaire, bilinéaire, multilinéaire
  Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel F de dimension finie, et $f : I \to E$ dérivable. Alors $L(f)$ est dérivable sur I et

$$[L(f)]' = L(f')$$

  Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f, g)$ est dérivable sur I et on a

$$[B(f, g)]' = B(f', g) + B(f, g')$$

  Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels de dimension finie et M une application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F. Si $f_1, \dots, f_p$ sont des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors $M(f_1, \dots, f_p)$ est dérivable sur I et on a

$$[M(f_1, \dots, f_p)]' = M(f_1', f_2, \dots, f_p) + M(f_1, f_2', \dots, f_p) + \cdots + M(f_1, f_2, \dots, f_p')$$

9.2.3 fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ si f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k. Là encore, il suffit d'étudier les coordonnées de f dans n'importe quelle base de E :

$$\text{pour } f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p, \quad f^{(k)} = f_1^{(k)} e_1 + \cdots + f_p^{(k)} e_p$$

- Pour L application linéaire de E dans F, B application bilinéaire de $E \times G$ dans F, et f, g de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs dans E et F, on a :
  - $L \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\quad [L(f)]^{(n)} = L \circ f^{(n)}$.
  - **Formule de Leibniz**
    $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\qquad [B(f, g)]^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B(f^{(j)}, g^{(n-j)})$.

9.3 Intégration

9.3.1 intégrale d'une fonction continue par morceaux et propriétés

- Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite *continue par morceaux* si ses coordonnées dans une base de E le sont. La continuité par morceaux ne dépend pas de la base choisie.
  Une fonction $f : I \to E$ est *continue par morceaux* si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.
  On note $\mathcal{CM}(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans E.

— Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs dans E. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. On note $f_1,\dots,f_p$ les fonctions coordonnées de f dans cette base : $f = f_1e_1 + f_2e_2 + \cdots + f_pe_p$. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1\right) e_1 + \left(\int_a^b f_2\right) e_2 + \cdots + \left(\int_a^b f_p\right) e_p$$

Cette quantité est indépendante du choix de la base de E. On étend la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\begin{cases} \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \end{cases}$.

- Soient f, g des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans E et λ,μ dans $\mathbb{K}$.
  - **Linéarité**
  $$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
  - **Relation de Chasles**
  $$\forall c \in [a,b], \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
  - **Effet d'une application linéaire**
  Pour L application linéaire, $\quad L(\int_a^b f) = \int_a^b L\circ f$.
  - **Propriété des sommes de Riemann**
  Les sommes de Riemann associées à f sur $[a,b]$, $S_n(f)$ et $T_n(f)$, convergent vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini.
  $$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \qquad \text{et} \qquad T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$
- Inégalité triangulaire
Pour $a \leqslant b$ et f continue par morceaux sur $[a,b]$, on a
$$\|\int_a^b f\| \leqslant \int_a^b \|f\| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}\|f\|$$

9.3.2 primitives et intégrales

- On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I vérifiant $F' = f$. Si f admet des primitives, celles-ci se déduisent les unes des autres par addition d'une constante vectorielle.
Les primitives de f peuvent se calculer à partir des fonctions coordonnées de f.
On retrouve le théorème fondamental de l'intégration : Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

- Pour tout $b \in I$, pour toute primitive F de f, on peut calculer les intégrales à l'aide de primitives :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

  En particulier, quand f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, f est une primitive de f', et on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

- Inégalité des accroissements finis
  Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose qu'il existe k réel tel que : $\forall t \in I,\ \|f'(t)\| \leqslant k$. Alors

$$\forall (c,d) \in I^2, \quad \|f(c) - f(d)\| \leqslant k|c-d|$$

9.4 Formules de Taylor

9.4.1 formules globales

Dans les deux formules suivantes, l'ordre de a et b n'importe pas (on ne demande pas $a \leqslant b$).

- Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n
  Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. On a pour a et $b \in I$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n
  Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I. Pour a et b dans I, on a l'inégalité :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

  où $M = \max\limits_{t\in[a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\|$.

9.4.2 formule locale : formule de Taylor-Young

Pour f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

9.5 Suites et séries de fonctions

Reprenons les grands points du chapitre Suites et séries de fonctions numériques. Nous y avons défini les modes de convergence (convergence simple, convergence uniforme, convergence normale) et appris les grands théorèmes : interversion de limites, transmission de continuité, interversion limite-intégration et interversion limite-dérivation.

Au chapitre Topologie dans un espace vectoriel normé, nous avons étendu le théorème d'interversion de limites et le théorème de transmission de continuité à des fonctions $f_n : A \subset E \to F$, avec E et F espaces vectoriels normés de dimension finie.
Nous étendons maintenant aux fonctions vectorielles $f_n : I \subset \mathbb{R} \to E$ les théorèmes d'intégration et de dérivation du chapitre Suites et séries de fonctions numériques.

9.5.1 interversion limite-intégration

- Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans E, convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$$

- Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans E, convergeant uniformément sur $[a,b]$. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

9.5.2 interversion limite-dérivation

Soient des fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans E.

- On suppose que :
  - (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I,
  - (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I,

  alors
  - (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I,
  - f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
  - $f' = g$.
- On suppose que :
  - la série $\sum f_n$ converge simplement sur I,
  - la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I,

  alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a l'interversion :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

  et $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Ces résultats se généralisent à la classe $\mathcal{C}^p$, avec comme hypothèses : des convergences simples sur I pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ de $(f_n^{(k)})$ ou $\sum f_n^{(k)}$, et une convergence uniforme sur tout segment de I pour la suite $(f_n^{(p)})$ ou la série $\sum f_n^{(p)}$.

9.5.3 approximation uniforme

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans E. Alors il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f.
« Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ ».

Chapitre 10

Équations différentielles scalaires (MPSI)

10.1 Généralités sur les équations linéaires

- Si T est une application linéaire, toute équation de la forme $T(y) = b$, où b est fixé et y est l'inconnue, est appelée *équation linéaire* et b est *le second membre*.
Lorsque $b = 0$, on dit que l'équation est *homogène*. L'équation $T(y) = 0$ est l'équation homogène associée à l'équation $T(y) = b$.

  Imaginons que nous disposions d'au moins une solution y_{part} à l'équation $T(y) = b$. Cette solution a pu être repérée au coup dœil, par intuition, par une méthode apprise, ou nous être fournie par l'énoncé. On parle de *solution particulière*. Comment, dès lors, obtenir toutes les solutions de l'équation $T(y) = b$?

  $$T(y) = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T(y) & = b \\ T(y_{part}) & = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(y) & = b \\ T(y) - T(y_{part}) & = b - b = 0 \end{cases}$$

  et par linéarité de T :

  $$\Leftrightarrow \quad T(y - y_{part}) = 0$$

  $\Leftrightarrow$ $y - y_{part}$ est solution de l'équation homogène associée

  $\Leftrightarrow$ y est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène

  Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $T(y) = b$, il suffit de connaître **une** solution particulière et **toutes** les solutions de l'équation homogène associée.

- Principe de superposition
  Si y_1 est une solution de l'équation $T(y) = b_1$ et y_2 est une solution de l'équation $T(y) = b_2$, alors pour λ_1 et λ_2 réels, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation $T(y) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

10.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

- Soient a et b des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$, c'est trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ dérivables et telles que

  $$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

Solution générale de (E) = Solution particulière de (E) + Solution générale de (H)

- Soit A une primitive de a sur I. Les solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto ce^{-A(x)}$ pour c décrivant $\mathbb{K}$.

- Pour rechercher une solution particulière, on dispose de *la méthode de la variation de la constante*. L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto c(x)e^{-A(x)}$ (c n'est plus une constante, d'où le nom donné à la méthode).

- Soient a et b des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, x_0 un point de I et y_0 une valeur de $\mathbb{K}$.
  Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y &= b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution.

10.3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

- Soient a et b dans $\mathbb{K}$ et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre **à coefficients constants**
  $y'' + ay' + by = f(t)$, c'est trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivables et telles que
  $$\forall t \in I,\ y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

Solution générale de (E) = Solution particulière de (E) + Solution générale de (H)

- Résolution de l'équation homogène
  Le polynôme $X^2 + aX + b$ est le *polynôme caractéristique* associé à l'équation différentielle.
  Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, notons r_1 et r_2 les deux racines complexes du polynôme caractéristique de (H).
  - Si $r_1 \neq r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme
    $$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$
  - Si $r_1 = r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme
    $$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

  Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,
  - Si le polynôme caractéristique de (H) admet deux racines réelles $r_1 \neq r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme
    $$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
  - Si le polynôme caractéristique de (H) admet une unique racine réelle r alors les solutions de (H) sont de la forme
    $$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si le polynôme caractéristique de (H) admet deux racines complexes non réelles $r - i\omega$ et $r + i\omega$ alors les solutions de (H) sont de la forme

$$t \mapsto e^{rt}\left(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\right), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

10.3.1 recherche d'une solution particulière

- La méthode de la variation des constantes sera vue dans le chapitre suivant.
- Second membre polynomial
  L'équation différentielle $y'' + ay' + by = P(t)$ admet une solution particulière polynomiale de degré au plus $\deg(P) + 2$, et plus précisément :
  — de degré $\deg(P)$ si $b \neq 0$,
  — de degré $\deg(P) + 1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$,
  — de degré $\deg(P) + 2$ si $a = b = 0$ (cas facile de toute façon en primitivant $y'' = P(t)$).

- Second membre exponentiel
  $(A, r) \in \mathbb{C}$. L'équation différentielle $y'' + ay' + by = Ae^{rt}$ possède une solution particulière de la forme suivante, où $B \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} t \mapsto Be^{rt} & \text{si } r \text{ n'est pas racine du polynôme caractéristique} \\ t \mapsto Bte^{rt} & \text{si } r \text{ est racine simple du polynôme caractéristique} \\ t \mapsto Bt^2e^{rt} & \text{si } r \text{ est racine double du polynôme caractéristique} \end{cases}$$

- En présence de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = A\cos(kt)e^{rt}$ ou $y'' + ay' + by = A\sin(kt)e^{rt}$ avec A, k, r réels, on se ramène à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = Ae^{ikt}e^{rt} = Ae^{(r+ik)t}$ de la propriété précédente, on en trouvera des solutions particulières, et on en prendra les parties réelle ou imaginaire.

10.3.2 problème de Cauchy

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une et une seule solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Chapitre 11

Équations différentielles linéaires

11.1 Généralités

11.1.1 vocabulaire et notations

- On appelle *système différentiel linéaire d'ordre 1* toute équation différentielle de la forme

$$X' \;=\; A(t)X \;+\; B(t)$$

où

- $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue
- $B : I \to \mathbb{K}^n$ est continue
- $X : I \to \mathbb{K}^n$ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1$.

Un tel système s'écrit :

$$\text{(Syst)} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & a_{1,1}(t)x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}(t)x_n & + & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n,1}(t)x_1 & + & \dots & + & a_{n,n}(t)x_n & + & b_n(t) \end{array} \right.$$

Les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système et les b_i sont les seconds membres.
Le système linéaire *homogène*, ou *sans second membre*, associé à (Syst) est : $X' = A(t)X$.

- Toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n se ramène à un système différentiel linéaire d'ordre 1.

- Équation différentielle liée à une application linéaire a
On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1* une équation de la forme

$$x' \;=\; a(t)(x) \;+\; b(t)$$

où

- $a : I \to \mathscr{L}(E)$ est continue
- $b : I \to E$ est continue
- $x : I \to E$ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1$.

- Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy
  Soit $f : I \to E$.
  f est une solution au problème de Cauchy en (t_0, x_0) : $\begin{cases} x' & = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$ si, et seulement si, f est continue et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(f(s)) + b(s))\,\mathrm{d}s$$

11.1.2 structure de l'ensemble des solutions

- Principe de superposition
  Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et $B = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$.
  Si X_1 est solution de l'équation différentielle $X' = AX + B_1$ et X_2 est solution de l'équation différentielle $X' = AX + B_2$, alors $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ est solution de l'équation différentielle $X' = AX + B$.

- Théorème de Cauchy linéaire
  Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ continues sur l'intervalle I.
  Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = A(t)X + B(t)$ vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$.
  Autrement dit, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' & = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) & = X_0 \end{cases}$$

  admet une unique solution.

- Espace des solutions
  Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ continues sur l'intervalle I. On considère l'équation différentielle

$$\text{(Syst)} \quad X' = A(t)X + B(t)$$

  et on note (H) l'équation homogène associée : $X' = A(t)X$.
  - L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension finie égale à n.
  - L'ensemble $\mathcal{S}_{\text{Syst}}$ des solutions de (Syst) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction $\mathcal{S}_H$.
- Cadre des équations différentielles scalaires d'ordre n
  Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre n :

$$(E) : \quad y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

  et (H) l'équation différentielle homogène associée.
  - L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension finie égale à n.

- L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}_H$.

Pour tout $(t_0, x_0, \dots x_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$, le théorème de Cauchy linéaire assure qu'il existe une et une seule solution de (E) vérifiant :

$$y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

11.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 et wronskien

Dans cette partie, a, b et c sont des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse aux équations différentielles :

$$\begin{aligned}(E) :&\quad x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)\\ (H) :&\quad x'' = a(t)x' + b(t)x\end{aligned}$$

Nous avons appris que $\mathcal{S}_H$ était un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et que $\mathcal{S}_E$ était de la forme $x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$, où x_{part} est une solution particulière de (E). Nos objectifs sont ici :

— de décider facilement, avec l'outil *wronskien*, si deux solutions de (H) forment une base de (H),

— de mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour obtenir une solution particulière de (E).

11.2.1 wronskien

- Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation homogène (H). On appelle *wronskien* de ces deux solutions, l'application
$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$
- Le wronskien est un outil permettant de caractériser les bases de solutions de (H), car les assertions suivantes sont équivalentes (en conservant les notations de la définition) :
  1. (x_1, x_2) est une base de $\mathcal{S}_H$
  2. il existe $t \in I$ tel que $W(t) \neq 0$
  3. pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.

11.2.2 méthode de variation des constantes

On commence par ramener l'équation différentielle scalaire d'ordre 2 $x'' = a(t)x' + b(t)x$ à une système différentiel vectoriel d'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = A(t) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + B(t)$$

Si on connaît une base (x_1, x_2) des solutions de $x'' = a(t)x' + b(t)x$, on cherche une solution particulière du système différentiel sous la forme

$$X(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$$

Les fonctions $c_1 =$ et c_2 sont solutions de : $c_1'(t)X_1(t) + c_2'(t)X_2(t) = B(t)$.

11.3 Résolution des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants

- On considère l'équation différentielle homogène $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions est
$$\left\{t \mapsto e^{tA}C,\ C \in \mathbb{K}^n\right\}$$
- La solution au problème de Cauchy $\begin{cases} X' &= AX \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$ est $X : t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0$.
- Dans le cas où $a : I \to \mathscr{L}(E)$ est une application linéaire constante, on identifie a à un élément de $\mathscr{L}(E)$, et l'équation différentielle homogène $x' = a(t)(x)$ s'écrit $x' = a(x)$ ou $x' = a \cdot x$. On dit que c'est une équation différentielle homogène *à coefficients constants*.
Pour a endomorphisme de E et $(t_0, x_0) \in I \times E$, la fonction $t \mapsto e^{(t-t_0)a}(x_0)$ est l'unique solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} x' &= a(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$
- Méthode – cas où A est diagonalisable (ou, éventuellement, trigonalisable)
Si A est diagonalisable, on écrit $A = PDP^{-1}$ avec A inversible et D diagonalisable.
On pose $Y = P^{-1}X$.
On a $X' = AX$ si, et seulement si, $Y' = DY$.
On sait résoudre cette équation différentielle.
On conclut en écrivant $X = PY$.

11.4 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées

Les équations différentielles scalaires rencontrées dans ce chapitre :

$$y' = a(t)y + b(t) \quad \text{ou} \quad y'' = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$$

sont des équations *normalisées*, parce que le coefficient à côté de $y^{(n)}$ vaut 1.

Plan d'étude fréquent des équations non normalisées

$$a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad \text{ou} \quad a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$$

— Si la fonction a ne s'annule pas sur I, diviser par $a(t)$ permet de se ramener à une forme normalisée.

— Sinon, on commence par résoudre l'équation sur tout intervalle sur lequel a ne s'annule pas. On cherche ensuite, par analyse-synthèse, les solutions sur l'intervalle entier. C'est ce qu'on appelle le problème du *raccord* des solutions, qui doivent être dérivables (respectivement deux fois dérivables) sur l'intervalle I.

11.5 Exemples de recherche de solutions développables en série entière

Chapitre 12

Calcul différentiel

12.1 Introduction avec les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Dans cette section, on considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables.

12.1.1 limites et continuité

Dans $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x_0, y_0)$ si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ tend vers 0. Dans ce cas, $x \to x_0$ et $y \to y_0$. Il faut cependant faire attention à ne pas se retrouver avec des double-limites.

12.1.2 dérivées directionnelles et dérivées partielles d'ordre 1

- Dérivée directionnelle
  Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est dérivable en $a = (x_0, y_0)$ suivant la direction u si la fonction g à une variable :
  $$g : t \mapsto f(a + tu)$$
  est dérivable en 0. La dérivée directionnelle de f en a selon la direction u est alors :
  $$\mathrm{D}_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$
- Dérivées partielles
  Les dérivées partielles sont les dérivées directionnelles de f dans les directions $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Autrement dit, ce sont, si elles existent et sont finies, les quantités :
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$
  On les note aussi $\partial_1 f(x_0, y_0)$ et $\partial_2 f(x_0, y_0)$.
  Le vecteur *gradient* de f en (x_0, y_0) est $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f admet des dérivées partielles sur U et que celles-ci sont continues sur U.
- Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- On a les propriétés usuelles de classe $\mathcal{C}^1$, et de calcul des dérivées partielles, pour $\lambda f + \mu g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $\varphi \circ f$ avec φ fonction de $f(U)$ dans $\mathbb{R}$.

12.1.3 formule de Taylor-Young à l'ordre 1, plan tangent, différentielle

- Formule de Taylor-Young
  Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, f admet un développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0), unique et donné par

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0) | (h,k)\rangle + o(\|(h,k)\|)$$

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &\underset{(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\|(h,k)\|) \\ f(x,y) &\underset{(x_0,y_0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\|(x-x_0,y-y_0)\|) \end{aligned}$$

- Dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble d'équation

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

  est un plan ; il s'agit du **plan tangent à la surface de f en** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- L'application

$$L : (h,k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$$

  est une application linéaire. On l'appelle *différentielle de f en* (x_0, y_0) et on la note $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

- On remarque que

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(v) = \langle \nabla f(x_0,y_0) | v\rangle$$

  L'application :

$$\mathrm{d}f : \begin{pmatrix} U & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ (x_0,y_0) & \mapsto & \mathrm{d}f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

  est appelée *différentielle de f*.

12.1.4 règle de la chaîne

- **Règle de la chaîne**
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $\gamma : \begin{pmatrix} I & \to & U \\ t & \mapsto & (x(t),y(t)) \end{pmatrix}$ et $f : U \to \mathbb{R}$.
  Alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \quad (f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t)\rangle = x'(t)\partial_1 f(x(t),y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t),y(t))$$

- Considérons trois fonctions f, φ, ψ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, ainsi que

$$H : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(\varphi(x,y),\psi(x,y)) \end{pmatrix}$$

  H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et ses deux dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y).\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,y),\psi(x,y)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y).\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y),\psi(x,y)) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y).\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,y),\psi(x,y)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y).\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y),\psi(x,y)) \end{aligned}$$

- Interprétation géométrique du gradient
  S'il n'est pas nul, le gradient de f en $a = (x_0, y_0)$ est :
  — de direction orthogonale à la courbe de niveau de f passant par a
  — de sens orienté vers les courbes de niveaux supérieurs
  — de norme d'autant plus forte que les courbes de niveaux sont resserrées près de a.

  De plus, il donne la direction « de plus forte pente » en a : $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

12.1.5 dérivées partielles d'ordre 2

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U : $\partial^2_{1,2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\partial^2_{2,1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\partial^2_{1,1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\partial^2_{2,2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. On stocke les résultats dans les matrices hessiennes $H_f(x, y)$ de f.
- Théorème de Schwarz
  Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, les matrices hessiennes de f sont des matrices symétriques. Pour tout $(x_0, y_0) \in U$, on a :
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2
  Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Pour tout $(x_0, y_0) \in U$,
  $$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right] + o(h^2+k^2)$$

Cadre de travail jusqu'à la fin du chapitre
E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.
Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, pour tout $a \in \mathcal{U}$, pour $h \in E$ « suffisamment petit », $a + h$ appartient à $\mathcal{U}$.
E étant de dimension finie, E peut être muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.
F étant de dimension finie, F peut être muni d'une base $(e'_1, \dots, e'_p)$.
Pour $x \in \mathcal{U}$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \qquad f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \underset{\text{identification}}{=} f(x_1, \dots, x_n)$$

Cette identification ne nous étonne d'ailleurs pas quand $E = \mathbb{R}^n$, ce qui sera souvent notre cadre de travail. Ceci explique que l'on parle de *fonctions de plusieurs variables*. Quand on veut donner un rôle particulier à chacune des variables, nous considérons les *applications partielles* :

$$x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \text{ pour } x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \text{ fixés}$$

Pour $x \in \mathcal{U}$,

$$f(x) = f_1(x)e'_1 + f_2(x)e'_2 + \cdots + f_p(x)e'_p$$

Les fonctions $f_j : x \mapsto f_j(x)$ sont les *fonctions composantes*, à valeurs réelles.

12.2 Différentiabilité

12.2.1 dérivée selon un vecteur

- Soit $a \in \mathcal{U}$ et $v \in E$. Sous réserve d'existence, la *dérivée de f en a selon le vecteur v*, notée $\mathrm{D}_v f(a)$, est la dérivée en 0 de la fonction d'une variable $t \mapsto f(a+tv)$.

$$\mathrm{D}_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

- Dérivées partielles relatives à une base
  Pour $(e_1, \dots, e_n)$ base de E et $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ième dérivée partielle de f en a est la dérivée de f en a selon le vecteur e_i. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a)$$

12.2.2 différentielle en un point

- On dit que f est *différentiable* en a, ou que f *admet un développement limité* à l'ordre 1 en a, s'il existe une application linéaire $L : E \to F$ telle que :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

  Dans ce cas, une telle application L est unique. On l'appelle *différentielle* de f en a et on la note $\mathrm{d}f(a)$.
- Reformulation : il existe une fonction ε de limite 0 en 0 telle que l'on ait, au voisinage de 0, $f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$. On peut noter $o(h)$ à la place de $o(\|h\|)$.
- Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si, et seulement si, toutes les fonctions composantes f_j le sont.
- Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et f admet une dérivée selon tout vecteur en a :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$$

- Cas particuliers
  Si f est constante, alors $\forall a \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.Si f est la restriction à $\mathcal{U}$ d'une application linéaire, alors $\forall a \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a) = f$. Si f est une fonction de la variable réelle, f est différentiable en a si, et seulement si, f est dérivable en a. Dans ce cas,

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h \quad \text{ et par linéarité de } \mathrm{d}f(a),\ f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et si $\mathrm{d}f$ est continue sur $\mathcal{U}$.

12.2.3 lien avec les dérivées partielles

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si, et seulement si, ses dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

- On munit E d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{B}'$. Soit f une application différentiable en a, de composantes $f_1, \dots, f_p$. La matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans ces bases est la matrice de coefficients :

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$$

  Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, on l'appelle *matrice jacobienne* de f en a et on la note $J_f(a)$.

12.2.4 gradient (cas où E est euclidien et $F = \mathbb{R}$)

Ici E est un espace euclidien, et $f : \mathcal{U} \subset E \to \mathbb{R}$.
Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, on appelle *gradient* de f en a, et on note $\nabla f(a)$, l'unique vecteur v de E qui vérifie :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a)(h) = \langle v | h \rangle$$

Dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on a :

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f(a)(h) = \langle \nabla f(a) | h \rangle$$

12.3 Opérations sur les applications différentiables

- Si f et g sont différentiables sur $\mathcal{U}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$$

- Multilinéarité. Tous les espaces vectoriels en jeu sont de dimension finie.
  Si f et g sont différentiables et B est une application bilinéaire, alors $B(f, g)$ est différentiable et

$$\mathrm{d}B(f,g)(a)(h) \quad = \quad B(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a)(h))$$

  Plus généralement, si $f_1, \dots, f_r$ sont différentiables et que M est une application multilinéaire, alors $M(f_1, \dots, f_r)$ est différentiable et

$$\mathrm{d}M(f_1, \dots, f_r)(a)(h) \quad = \quad M(\mathrm{d}f_1(a)(h), f_2(a), \dots, f_r(a)) + \cdots + M(f_1(a), \dots, f_{r-1}(a), \mathrm{d}f_r(a)(h))$$

- Règle de la chaîne
  - Soient $f : \mathcal{U} \to F$ et $g : \mathcal{V} \to G$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$.
    Au niveau des matrices jacobiennes, nous avons simplement $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.

  - En notant $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f dans une base $\mathcal{B}'$ de F, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(a))$$

- Dérivation le long d'un arc
  Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ et $t \in I$.

- Si γ est dérivable en t et f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

- Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ et on a plus simplement :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

12.4 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

12.4.1 la classe $\mathcal{C}^1$

- Les opérations algébriques usuelles sont valables : combinaison linéaire, produit lorsqu'il s'agit de fonctions réelles, et composées lorsqu'il s'agit de fonctions réelles. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On peut rédiger la classe $\mathcal{C}^1$ de $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ à l'aide de fonctions polynomiales suivies de fonctions usuelles.
- Intégration le long d'un arc
  Soit $f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$$

- Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe par arcs.
  La fonction f est constante sur $\mathcal{U}$ si, et seulement si, f est différentiable et $\mathrm{d}f = 0$.

12.4.2 les classes $\mathcal{C}^k$

- On peut définir des dérivées partielles de dérivées partielles. Lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_{j_k}(\partial_{j_{k-1}}(\dots(\partial_{j_1} f)))$ est la dérivée partielle selon les indices $(j_1, \dots, j_k)$, et on la note $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$.
  Quand on dérivef k fois, on parle de dérivées partielles d'ordre k. Une application est de classe $\mathcal{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.
  On a les opérations algébriques habituelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, composition, les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^k$.
  Lorsque f est à valeurs réelles, ses dérivées partielles d'ordre 2 sont stockées dans la matrice hessienne :

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

- Théorème de Schwarz
  Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, les matrices hessiennes de f sont des matrices symétriques.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2
  Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$. On a

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2)$$

  soit aussi

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) h | h \rangle + o(\|h\|^2)$$

12.5 Tangence et orthogonalité

12.5.1 ensemble des vecteurs tangents à une partie en un point

- Soit X est une partie de E et x un point de X.
  Les vecteurs tangents à X en x sont les dérivées en 0 des arcs tracés sur X, définis au voisinage de 0, passant par x en 0 et dérivables en 0.
  Présenté autrement : un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.
  On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.
- Il ne faut pas croire que $T_x X$ est un espace vectoriel, mais quand ça l'est, on parle d'espace tangent.

12.5.2 exemples d'ensembles $T_x X$

Exemple des vecteurs tangents à une sphère, exemple des vecteurs tangents à un sous-espace affine.

12.5.3 le cas des ensembles X définis par une équation

Soit $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $X = \{x \in \mathcal{U} \mid g(x) = 0\}$. Pour $a \in X$ tel que $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, on a

$$T_a X = \ker \mathrm{d}g(a) = (\nabla g(a))^\perp$$

Chapitre 13

Optimisation

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n (très souvent, $E = \mathbb{R}^n$), et f est une fonction définie sur une partie A de E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

13.1 Généralités sur les extrema

- Soit $a \in A$.
  f admet un minimum (global) en a lorsque $\quad \forall x \in A,\ f(a) \leqslant f(x)$.
  f admet un maximum (global) en a lorsque $\quad \forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(a)$.
  f admet un extremum (global) en a si f admet un minimum global ou un maximum global en a.
  f admet un minimum local en a s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B(a, r)$, $f(a) \leqslant f(x)$.
  f admet un maximum local en a s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B(a, r)$, $f(x) \leqslant f(a)$.

- Théorème des bornes atteintes
  Toute fonction continue sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

13.2 Recherche des extrema de f sur un ouvert : les extrema libres

13.2.1 étude à l'ordre 1 sur un ouvert

- Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un OUVERT $\mathcal{U}$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathcal{U}$, alors

$$\mathrm{d}f(a) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \nabla f(a) = 0$$

- Un point a de $\mathcal{U}$ en lequel $\mathrm{d}f(a) = 0$ est appelé *point critique* de f.

13.2.2 étude à l'ordre 2

- Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$, le développement limité à l'ordre 2 de f en a est

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2)$$

  En un point critique a : $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h)$.

- Théorème
  Soit f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
  - condition nécessaire pour un minimum local
    Si f admet un minimum local en a, alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
  - condition suffisante pour un minimum local
    Si a est point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a.
- On a les adaptations pour un maximum local : si f admet un maximum local en a, alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$. Et si a est point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$, alors f atteint un maximum local strict en a.
- Si $H_f(a)$ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, a ne correspond pas à un extremum pour f.
- Il y a des situations où ce théorème n'apporte aucune conclusion. C'est le cas quand on sait seulement que toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, ou quand toutes les valeurs propres sont négatives ou nulles.

- Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit a un point critique de f.
  - Si $\det(H_f(a)) > 0$, f admet un extremum local en a.
    Il s'agit d'un minimum local si $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$, et d'un maximum local sinon.
  - Si $\det(H_f(a)) < 0$, f admet un point col en a.
  - Si $\det(H_f(a)) = 0$, on ne peut pas conclure par cette approche.

13.3 Recherche des extrema de f sous contrainte : les extrema liés

13.3.1 distinction intérieur - frontière

Soit D une partie de E (non nécessairement ouverte). Les extrema globaux d'une fonction f à valeurs réelles sur D sont :

- soit atteints sur $\mathring{D}$, auquel cas ce sont des extrema locaux sur un ouvert, ce qui ramène à la section précédente,
- soit atteints sur $D \setminus \mathring{D}$.

13.3.2 méthode de substitution

13.3.3 méthode de Lagrange

Théorème de Lagrange
Soit X l'ensemble des zéros de g et $a \in X$. On suppose que $\mathrm{d}g(a) \neq 0$.
Si la restriction de f à X admet un extremum local en a, alors :

— $\mathrm{d}f(a)$ est nulle sur T_aX,

— $\mathrm{d}f(a)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(a)$.

Si E est euclidien, cela se traduit par $\nabla f(a)$ est colinéaire à $\nabla g(a)$.

Chapitre 14

Groupes

14.1 Révisions de première année

14.1.1 généralités sur les groupes et morphismes de groupes

- Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$. On dit que $(G,\star)$ est un *groupe* lorsque
  - $\star$ est associative
  - $\star$ admet un élément neutre
  - tout élément de G est inversible.

  L'élement neutre du groupe G est noté e, ou encore 1_G si la loi est notée multiplicativement et 0_G si la loi est notée additivement.

  Le groupe $(G,\star)$ est dit *commutatif* (ou *abélien*) lorsque la loi $\star$ est commutative.

- Soit $(G,\star)$ un groupe et H une partie de G. On dit que H est un *sous-groupe* de $(G,\star)$ lorsque H est stable par $\star$ et que $(H,\star)$ est un groupe.

- Soit $(G,\star)$ un groupe et H une partie de G.

$$H \text{ est un sous-groupe de } G \Leftrightarrow \begin{cases} 1_G \in H \\ H \text{ est stable par produit : } \forall h,h' \in H, \quad h \star h' \in H \\ H \text{ est stable par inversion : } \forall h \in H, \quad h^{-1} \in H \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1_G \in H \\ H \text{ est stable par produit-inversion : } \forall h,h' \in H, \quad h^{-1} \star h' \in H \end{cases}$$

  En notation additive,

$$H \text{ est un sous-groupe de } G \Leftrightarrow \begin{cases} 0_G \in H \\ \forall h,h' \in H, \quad h'-h \in H \end{cases}$$

- groupe produit
  Soient $(G_1,\square)$ et $(G_2,\diamond)$ deux groupes. On définit une loi de composition interne sur $G_1 \times G_2$ en posant, pour $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$ dans $G_1 \times G_2$:

$$x \star y = (x_1 \square y_1, x_2 \diamond y_2)$$

Muni de cette loi, $G_1 \times G_2$ est un groupe, appelé *groupe produit*, d'élément neutre $(1_{G_1}, 1_{G_2})$.

- Soit $(G, \square)$ et $(G', \diamond)$ deux groupes. On dit qu'une application f de G dans G' est un *morphisme de groupe* lorsque
$$\forall x, y \in G, \quad f(x \square y) = f(x) \diamond f(y)$$
On dit que f est :
  — un *endomorphisme* lorsque $(G, \square) = (G', \diamond)$.
  — un *isomorphisme* lorsque f est bijective.
  — un *automorphisme* lorsque f est un endomorphisme et un isomorphisme.

- Soit f un morphisme du groupe de $(G, \square)$ dans $(G', \diamond)$. Alors
$$f(1_G) = 1_{G'}$$
$$\forall x \in G, \quad f\left(x^{-1}\right) = [f(x)]^{-1}$$

- Soit f un morphisme de $(G, \square)$ dans $(G', \diamond)$. Alors
  — l'image réciproque d'un sous-groupe de G' est un sous-groupe de G.
  — l'image directe d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G'.

- Image et noyau :
$\operatorname{Im} f = \{f(x),\ x \in G\} = f(G)$ est un sous-groupe de G'. Et $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = 1_{G'}\}$ est un sous-groupe de G.

- La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupe. La bijection réciproque d'un isomorphisme de groupe est un isomorphisme de groupe.

14.1.2 le groupe symétrique

- Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Une permutation de E est une bijection de E dans E. L'ensemble des permutations de E est noté $\mathcal{S}_E$. L'ensemble E étant de cardinal n, il est en bijection avec $[\![1, n]\!]$ donc il est équivalent d'étudier l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$.
L'ensemble $\mathcal{S}_n$ est un groupe pour la composition, non commutatif pour $n \geqslant 3$.
L'ordre de la permutation σ est le plus petit entier naturel k non nul tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$.

- On appelle support d'une permutation σ l'ensemble des éléments x de $[\![1, n]\!]$ tels que $\sigma(x) \neq x$. Dans l'exemple ci-dessus, le support de σ est $\{1, 3, 4, 5, 6\}$. Deux permutations à support disjoints commutent.

- Soit $p \in [\![2, n]\!]$. On appelle *p-cycle*, toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$ pour laquelle il existe des éléments distincts $x_1, \ldots, x_p$ de $[\![1, n]\!]$ pour lesquels :
$$\sigma(x_1) = x_2,\ \sigma(x_2) = x_3, \ldots \sigma(x_{p-1}) = x_p \text{ et } \sigma(x_p) = x_1, \quad \text{et } \sigma(x) = x \text{ si } x \notin \{x_1, \ldots, x_p\}$$
Un tel p-cycle est noté $(x_1\ x_2 \ldots x_p)$.
On remarque qu'une transposition est un 2-cycle.
Toute permutation de $[\![1, n]\!]$ peut être décomposée d'une et une seule manière, à l'ordre des facteurs près, comme un produit de cycles disjoints.

- Supposons $n \geqslant 2$. On appelle *transposition* une permutation qui échange deux éléments distincts et qui laisse les autres invariants. On la note usuellement $(i\ j)$. Une transposition est d'ordre 2, elle est son propre inverse : c'est une involution.
  Toute permutation de $[\![1, n]\!]$ est un produit de transpositions. Il n'y a pas unicité de la décomposition en produit de transpositions.

- Il existe un et un seul morphisme de groupes ε de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$, appelée *signature*, qui donne à toute transposition la valeur -1 et pour lequel pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$:
  $$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$$
  La signature d'une transposition est -1 ; la signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$.

14.2 Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

14.3 Groupes engendrés par une partie

- L'intersection de sous-groupes du groupe G est un sous-groupe de G.
- Soit A une partie de G. L'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A est un sous-groupe de G, et c'est le plus petit sous-groupe de G contenant A. On l'appelle *groupe engendré* par A.
- On dit que la partie A engendre G (ou encore que A est une partie génératrice de G) si le sous-groupe engendré par A est égal à G.
- En notation multiplicative, le sous-groupe engendré par l'élément a de G est $\{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
  En notation additive, le sous-groupe engendré par l'élément a de G est $\{na,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
- Un groupe est *monogène* s'il est engendré par un de ses éléments. Un tel élément est appelé *générateur* de G.
  Un groupe est *cyclique* s'il est monogène et fini.
- Un groupe monogène est nécessairement commutatif.

14.4 Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

- Soit n un entier naturel. En première année, il a été rencontré la relation de congruence modulo n définie par :
  $$x \equiv y\ [n] \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in n\mathbb{Z}$$
  Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ qui est compatible avec les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire :
  $$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4, \quad \begin{cases} x \equiv x' & [n] \\ y \equiv y' & [n] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y & \equiv x' + y' & [n] \\ x \times y & \equiv x' \times y' & [n] \end{cases}$$
- On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo n. La classe d'un élément k de $\mathbb{Z}$ est notée $\overline{k}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a n éléments : $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$.

- Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on définit l'addition suivante :

$$\overline{k} + \overline{\ell} = \overline{k+\ell}$$

  Muni de cette addition, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif, d'élément neutre $\overline{0}$.

- On a $-\overline{k} = \overline{-k}$. Pour k et p entiers, $p\overline{k} = \overline{pk}$.

- Pour $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{k}$ est générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.

- On appelle *indicatrice d'Euler* de $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $\varphi(n)$, le cardinal de l'ensemble :

$$\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\}$$

  On a $\varphi(1) = 1$, et pour $n \geqslant 2$, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers de $[\![1, n-1]\!]$ premiers avec n.
  On vient de voir qu'il y avait $\varphi(n)$ générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

14.5 Structure des groupes monogènes

- Tout groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
- Tout groupe monogène fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ (autrement dit tout groupe cyclique de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$) est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

14.6 Ordre d'un élément dans un groupe

- En notation multiplicative, un élément a de G est *d'ordre fini* s'il existe un entier n non nul tel que $a^n = e$. *L'ordre* de a est le plus petit entier naturel n non nul tel que $a^n = e$.
  Si a n'est pas d'ordre fini, on dit que a est d'ordre infini.

- L'ordre de a dans G est le cardinal du sous-groupe de G engendré par a.

- Pour $k \in \mathbb{Z}$, $a^k = e$ si et seulement si l'ordre de a divise k.
- Théorème de Lagrange
  Dans un groupe fini, tous les éléments sont d'ordre fini et leur ordre divise le cardinal du groupe.

Chapitre 15

Déterminants

15.1 Déterminant d'ordre 2 ou 3

- Si on note (x, y) et (x', y') les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$,
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx$$
- Si on note (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x''y'z - x'yz'' - xy''z'$$
C'est la règle de Sarrus.

15.2 Déterminant de n vecteurs dans une base en dimension n

15.2.1 généralités

E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Soit $f : E^n \to F$ une application n-linéaire, c'est-à-dire linéaire en chacune de ses n variables.
  - f est symétrique si :
$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
  - f est antisymétrique si :
$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
    où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.
  - f est alternée si :
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0_F$$
- Une application multilinéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.
  Si $f : E^n \to F$ est une application multilinéaire antisymétrique (ou alternée), alors pour toute famille liée $(u_1, \ldots, u_n)$ de E, $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0_F$.

15.2.2 déterminant

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E, on appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

  $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée valant 1 en $\mathcal{B}$.

- Formule de changement de base
  Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E, les applications $\det_{\mathcal{B}}(.)$ et $\det_{\mathcal{B}'}(.)$ sont proportionnelles et plus précisément,

$$\det_{\mathcal{B}}(.) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(.)$$

- La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.
  La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$.

- Le déterminant d'une famille de vecteurs est :
  — multiplié par -1 lorsqu'on échange deux vecteurs de la famille ;
  — inchangé lorsqu'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ;
  — multiplié par α si on multiplie un vecteur de la famille par $\alpha \in \mathbb{K}$.

- Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on dit que deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont même orientation si $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$.
  La relation binaire « avoir la même orientation que » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E. L'une des classes d'équivalence est formée des bases directes et l'autre est formée des bases indirectes.
  Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est choisir une base de référence $\mathcal{B}_0$. Toutes les bases de même orientation que $\mathcal{B}_0$ sont dites directes tandis que les autres sont dites indirectes.

15.3 Déterminant d'une matrice carrée

- Le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ de la famille de ses vecteurs colonnes, soit encore

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

- Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :
  - $\det(I_n) = 1$
  - $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
  - $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Auquel cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
  - Deux matrices semblables ont même déterminant.
  - $\det(A^\top) = \det(A)$
  - Le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes (respectivement par rapport aux lignes). En particulier, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

15.4 Méthodes de calcul de déterminants de matrices

15.4.1 matrices triangulaires par blocs

Lorsque A est triangulaire, le calcul du déterminant est très facile, c'est le produit des coefficients diagonaux.

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}$$

Ceci se généralise aux matrices triangulaires par blocs.

Pour $A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & A_r \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}), \dots, A_r \in \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_r)$$

15.4.2 méthode du pivot

But : faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des déterminants de matrices triangulaires ou triangulaires par blocs.
Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes d'une matrice A. Soient $i \neq j$ deux indices compris entre 1 et n et $\alpha \in \mathbb{K}$.

- L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplie le déterminant par -1.
- L'opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ laisse le déterminant invariant.
- L'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplie le déterminant par α. Il faut donc diviser par α pour laisser inchangé le résultat.

Résultats à adapter pour les lignes.

15.4.3 développement par rapport à une ligne, une colonne

- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en ôtant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. On appelle alors :
  - mineur relatif à $a_{i,j}$ le scalaire $\det(A_{i,j})$
  - cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$
  - comatrice de A la matrice des cofacteurs de A, notée $\mathrm{Com}(A)$.

- Pour tout ligne i, on a le développement par rapport à cette ligne i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})}_{\text{cofacteur}} a_{i,j}$$

  Pour tout colonne j, on a le développement par rapport à cette colonne j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})}_{\text{cofacteur}} a_{i,j}$$

- Formule de la comatrice

$$A \times (\mathrm{Com}(A))^\top = \det(A)\, I_n = (\mathrm{Com}(A))^\top \times A$$

15.5 Déterminant d'un endomorphisme

- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$
- f est bijective si et seulement si $\det(f) \neq 0$
- $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = \det(f) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$

15.6 Déterminant de Vandermonde

Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on appelle *déterminant de Vandermonde* le déterminant de la matrice d'ordre $n+1$ suivant :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

On a :

1. $V(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si $x_0, \dots, x_n$ sont 2 à 2 distincts.
2. $V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

Chapitre 16

Compléments d'algèbre linéaire

16.1 Mémento de MPSI en annexe

16.2 Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, $p \geqslant 2$, $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- On appelle *somme* de $F_1, \dots, F_p$, et on note $\sum_{i=1}^{p} F_i$, l'ensemble

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_p = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_p \mid x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2,\ \dots,\ x_p \in F_p\}$$

  $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E ; c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E à contenir tous les F_i.
- On a $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ lorsque : $\forall x \in F$, il existe $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

- Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

  On dit que la somme $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe, et on note $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ ou $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, lorsque pour tout vecteur x de F, il existe un unique p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

- Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si, et seulement si, la décomposition du vecteur nul comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i est unique.

- Ici E est un espace vectoriel de dimension finie. Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$.

  On note $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
  1. F est une somme directe
  2. la concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ est une base de F.

  On appelle *base adaptée* à $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ toute base de E qui est concaténation de bases de $F_1, \dots, F_p$.

- On a toujours $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$. Il y a égalité des dimensions si et seulement si la somme est directe.

- Lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, on appelle *projecteurs associés* à cette somme directe les projection p_i où p_i est la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} E_j$.

- La famille des projecteurs associés à $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ vérifie :

$$\sum_{i\in I} p_i = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$$

- Caractérisation d'une application linéaire par ses restrictions
  On se donne $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et p applications linéaires de $u_i : E_i \to F$, F étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ pour laquelle chaque restriction $u_{|E_i}$ soit égale à u_i.

16.3 Matrices dans des bases adaptées

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f \in L(E)$.

On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si $\forall x \in F,\ f(x) \in F$

L'endomorphisme *induit* par u sur F est l'endomorphisme $u_F \in L(F)$ défini par :

$$u_F : \begin{pmatrix} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{pmatrix}$$

Réduire un endomorphisme u consistera à écrire E comme somme directe de sous-espaces stables par u pour lesquels les matrices associées seront les plus simples possibles, par exemple diagonales ou triangulaires.

16.4 Matrices définies par blocs

Pour A, B, C, D matrices de tailles compatibles, une matrice par blocs est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$. Le produit par blocs s'effectue en gros comme un produit usuel mais comme le produit matriciel n'est pas commutatif, il faut faire attention à l'ordre dans lequel on écrit chaque produit.

Produit : avec des matrices de tailles compatibles,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & G \\ \hline F & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE+CF & AG+CH \\ \hline BE+DF & BG+DH \end{array}\right)$$

Transposée :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)^{\top} = \left(\begin{array}{c|c} A^{\top} & C^{\top} \\ \hline B^{\top} & D^{\top} \end{array}\right)$$

Chapitre 17

Réduction (1)

u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

17.1 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension quelconque

17.1.1 vocabulaire

- Le scalaire λ est *valeur propre* de u s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$.
  Dans ce cas, x est appelé *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ.
  Quand E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé *spectre* de u et est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \ker(u - \lambda \,\mathrm{Id}) \neq \{0\} \\ &\iff u - \lambda \,\mathrm{Id} \text{ n'est pas injectif} \end{aligned}$$

  en particulier :

$$0 \in \mathrm{Sp}\, f \iff f \text{ n'est pas injectif}$$

- Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace vectoriel de E donné par

$$E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id})$$

  est appelé *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ.
  Si λ n'est pas valeur propre de u, on peut convenir que $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

- $$E_\lambda(u) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \lambda \text{ n'est pas valeur propre de } u \\ \{0\} \cup \{\text{vecteurs propres associés à } \lambda\} & \text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } u \end{cases}$$

17.1.2 propriétés des espaces propres

- Si u et w commutent alors les sous-espaces propres de u sont stables pas w.
- Des espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe.
- Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.

17.2 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie, éléments propres d'une matrice

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit qu'une matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un *vecteur propre* de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle tel que $AX = \lambda X$.
  Dans chacun de ces deux cas, on dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
  On appelle *spectre* de A, et note $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.
- On note $E_\lambda(A)$ ou $\ker(A - \lambda I_n)$ l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \lambda X$, et on appelle cet ensemble *espace propre* de A associé à la valeur propre λ.
$$E_\lambda(A) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \lambda \notin \mathrm{Sp}(A) \\ \{0\} \cup \{\text{vecteurs propres de } A \text{ associés à } \lambda\} & \text{si } \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \end{cases}$$
- Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. On a :
  - $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$
  - x est vecteur propre pour u associé à la valeur propre λ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.
  - $x \in E_\lambda(f)$ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) \in E_\lambda(A)$.
- Pour un endomorphisme en dimension finie, on a l'équivalence entre l'injectivité et la bijectivité. Ainsi,
$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\underset{\text{définition}}{\Leftrightarrow} && u - \lambda \,\mathrm{Id} \text{ n'est pas injectif} \\ &\underset{E \text{ est de dimension finie}}{\Leftrightarrow} && u - \lambda \,\mathrm{Id} \text{ n'est pas bijectif} \\ &\Leftrightarrow && \det(u - \lambda \,\mathrm{Id}) = 0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \exists X \neq 0 \mid AX = \lambda X \text{ ou } (A - \lambda I_n)X = 0 \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ est non inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$
  De plus, par le théorème du rang adapté (en repassant à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A) :
$$\dim E_\lambda(A) = n - \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n)$$
- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.
- Lorsque $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale avec les d_k distincts, on a de plus les espaces propres :
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ E_{d_k}(D) = \mathrm{Vect}(E_k)$$
  où E_k est le vecteur colonne ne comportant que des 0 sauf un 1 en k-ième ligne.

- $u \in \mathscr{L}(E)$ admet au plus $(\dim E)$ valeurs propres. A d'ordre n admet au plus n valeurs propres.
- $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \right) \leqslant \dim E$ et $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) \leqslant n$.
- Si A a autant de valeurs propres que sa taille, tous ses espaces propres sont de dimension 1.

17.3 Polynôme caractéristique

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de A, et on note χ_A, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par
$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$
C'est l'unique polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. On appelle *polynôme caractéristique* de u le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ égal à χ_A où A est n'importe quelle représentation matricielle de u.

- Le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme unitaire de degré n et on a :
$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{partie qui n'est pas à connaître}} + (-1)^n \det(A)$$

- Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.
Les valeurs propres de $u \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension finie, sont exactement les racines de χ_u.

— Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet exactement n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité (c'est-à-dire qu'une valeur propre est comptée autant de fois que son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A).
— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les valeurs propres complexes de A vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont conjuguées deux à deux.

17.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

- On appelle *ordre de multiplicité de la valeur propre* λ de A, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de A. On la note $m(\lambda)$.
De même, on appelle *ordre de multiplicité de la valeur propre* λ de u, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de u.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Deux valeurs propres complexes conjuguées de A vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont même ordre de multiplicité.

- Endomorphisme induit.
Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit, χ_{u_F}, divise χ_u.

- Pour toute valeur propre λ, on a
$$1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)$$
- En particulier, si λ est racine simple de χ_u ou χ_A, alors $\dim E_\lambda = 1$.

17.5 Endomorphismes et matrices diagonalisables

- *L'endomorphisme u est diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. *Diagonaliser un endomorphisme*, c'est, sous réserve que ce soit possible, déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de u.
  Par formule de changement de bases,

  $$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u) = P\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} \quad \text{avec } P \text{ matrice de passage de } \mathcal{C} \text{ à } \mathcal{B}$$

  et la matrice de u dans une base quelconque est alors semblable à une matrice diagonale.

- On dit qu'une *matrice est diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.
  Diagonaliser $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est, sous réserve que ce soit possible, trouver $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

- Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité. Les conditions suivantes sont équivalentes :
  1. u est diagonalisable
  2. il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u
  3. E est somme directe des sous-espaces propres de u : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$
  4. $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$
  5. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.

- Conditions suffisantes de diagonalisabilité. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :
  1. u possède n valeurs propres distinctes
  2. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples

  alors u est diagonalisable et ses espaces propres sont de dimension 1.

- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

17.6 Trigonalisabilité

- Un endomorphisme u de E est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
  Une matrice est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Trigonaliser u, c'est, lorsque c'est possible, trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Trigonaliser une matrice M, c'est, lorsque c'est possible, trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = PTP^{-1}$.

- u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
  Conséquence : toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, et tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

- Soit u un endomorphisme trigonalisable. La trace et le déterminant de u sont respectivement la somme et le produit de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.
  La trace et le déterminant d'une matrice trigonalisable sont respectivement la somme et le produit de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

17.7 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

- Un endomorphisme u de E est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On appelle alors *indice de nilpotence* de u le plus petit de ces entiers. Si l'on note $p \in \mathbb{N}$ l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent u, $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Si $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors par linéarité de u, pour tout $k \geqslant p$, $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- L'indice de nilpotence d'un endomorphisme de E est inférieur ou égal à $\dim E$.

- Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement s'il est trigonalisable et si 0 est sa seule valeur propre.
- Un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension n est nilpotent si, et seulement si, $\chi_u = X^n$.
- Une matrice A d'ordre n est nilpotente si, et seulement si, $\chi_A = X^n$.

Chapitre 18

Anneaux et arithmétique

18.1 Révisions

- Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes : une loi notée additivement, $+$, et une loi notée multiplicativement, $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* lorsque
  - $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A ou 0,
  - $\times$ est une loi associative,
  - $\times$ admet un élément neutre 1_A ou 1,
  - $\times$ est distributive par rapport à $+$

  Un élément $a \in A$ est dit *inversible* lorsqu'il est inversible pour la loi $\times$. Un anneau $(A, +, \times)$ est dit *commutatif* lorsque $\times$ est commutative.
- Calculs élémentaires. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Pour a et b dans A, on a

$$\begin{array}{ll} & 0_A \times a = 0_A \quad \text{et} \quad a \times 0_A = 0_A \\ \forall n \in \mathbb{Z}, & (n \cdot a)\, b = a\, (n \cdot b) = n \cdot (ab) \qquad \text{et en particulier, } -(ab) = (-a)b = a(-b) \\ & (-a)(-b) = ab \qquad \text{et en particulier, } (-1_A)^2 = 1_A \end{array}$$

- Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $a, b \in A$ tels que $a \times b = b \times a$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(a^{n-k} \times b^k\right) \quad \text{et} \quad a^n - b^n = (a-b) \times \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} \times b^k\right]$$

- Un élément a de l'anneau $(A, +, \times)$ est inversible s'il existe $b \in A$ tel que

$$ab = ba = 1$$

  Cet élément b est alors unique, on l'appelle inverse de a et on le note a^{-1}.
- Groupe des unités. L'ensemble $U(A)$ des éléments inversibles de l'anneau A est un groupe pour la multiplication.
- On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est *intègre* lorsque c'est un anneau commutatif non nul dans lequel on a l'implication :

$$a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

- Soit $(A, +, \times)$ un anneau et B une partie de A. On dit que B est un *sous-anneau* de A lorsque B est stable à la fois pour $+$ et pour $\times$, B contient 1_A et $(B, +, \times)$ est un anneau.

- Soit $(A,+,\times)$ un anneau et B une partie de A.

$$B \text{ est un sous-anneau de } A \Leftrightarrow \begin{cases} 1_A \in B \\ B \text{ est stable par différence :} & \forall x,y \in B,\ x-y \in B \\ B \text{ est stable par produit :} & \forall x,y \in B,\ xy \in B \end{cases}$$

- On appelle *corps* tout anneau commutatif non nul dans lequel tout élément non nul est inversible.
- Tout corps est intègre.
- Soient A et B deux anneaux et $f : A \to B$. f est un *morphisme d'anneaux* si :

$$f(1_A) = 1_B, \qquad \forall x,y \in A,\ f(x+y) = f(x)+f(y) \quad \text{et } f(xy) = f(x)f(y)$$

- Si f est un morphisme d'anneaux, f est un morphisme de groupes pour l'addition, donc

$$f(0_A) = 0_B \quad f(-x) = -f(x) \quad \text{et pour } n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x)$$

  Comme dans le cas des groupes, la composée de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux et l'image directe/réciproque d'un sous-anneau par un morphisme d'anneau est un sous-anneau. On définit également les notions d'isomorphisme d'anneaux, d'automorphisme d'anneau et d'anneaux isomorphes. Il reste vrai que la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme et que la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

18.2 Produit fini d'anneaux

Soient $(A_1,+,\times),\dots,(A_n,+,\times)$ des anneaux et $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. On définit des lois $+$ et $\times$ sur A en posant :

$$\begin{aligned} (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) &= (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \\ (x_1,\dots,x_n)\times(y_1,\dots,y_n) &= (x_1\times y_1,\dots,x_n\times y_n) \end{aligned}$$

L'ensemble A muni des lois $+$ et $\times$ définies ci-dessus est un anneau de neutres

$$0_A = (0_{A_1},\dots,0_{A_n}) \quad \text{et} \quad 1_A = (1_{A_1},\dots,1_{A_n})$$

Dans cet anneau produit, un élément $(a_1,\dots,a_n)$ est inversible si, et seulement si, $a_1,\dots,a_n$ sont inversibles. Dans ce cas, on a :

$$(a_1,\dots,a_n)^{-1} = (a_1^{-1},\dots,a_n^{-1})$$

18.3 Idéal d'un anneau commutatif

- Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif. Une partie I de A est un *idéal* de A si

$$\begin{cases} I & \text{est un sous-groupe de } (A,+) \\ I & \text{est absorbant : pour tout } (a,x) \in A \times I,\ a \times x \in I \end{cases}$$

- Soit $\varphi : A \to A'$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Le noyau de φ est

$$\ker \varphi = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0_{A'}\}$$

  Le noyau de φ est un idéal de A.

- Soit x un élément d'un anneau commutatif A.

$$xA = \{xa \mid a \in A\}$$

est le plus petit idéal de A contenant x. C'est l'intersection de tous les idéaux de A qui contiennent x. On l'appelle *idéal engendré par x*.

18.4 Divisibilité dans un anneau commutatif intègre

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif intègre.

- Soient a et b deux éléments de A.
On dit que a divise b (ou que b est multiple de a) s'il existe $u \in A$ tel que $b = au$. On note alors $a|b$.
-

$$x|y \quad \Leftrightarrow \quad yA \subset xA$$

Par conséquent, deux éléments engendrent le même idéal si, et seulement si, ils se divisent mutuellement. On dit qu'ils sont *associés*.

18.5 L'anneau $\mathbb{Z}$ et ses idéaux

- Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- Plus grand diviseur commun. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.
Il existe un unique $d \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. On a pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$k|d \quad \Leftrightarrow \quad (k|a \text{ et } k|b)$$

d est appelé PGCD de a et b et noté $a \wedge b$. On a une relation de Bézout :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad au + bv = d$$

- Pour $a_1, \dots, a_n$ entiers relatifs, il existe un unique entier naturel d tel que

$$d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + a_2\mathbb{Z} + \cdots + a_n\mathbb{Z}$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$k|d \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in [\![1, n]\!],\ k|a_i)$$

d est le PGCD de $a_1, \dots, a_n$.
- Pour $a_1, \dots, a_n$ entiers relatifs, il existe un unique entier naturel m tel que

$$m\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} \cap \cdots \cap a_n\mathbb{Z}$$

m est le PPCM de $a_1, \dots, a_n$.

18.6 L'anneau $\mathbb{K}[X]$

18.6.1 l'anneau $\mathbb{K}[X]$ et ses idéaux

- Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont les $P\mathbb{K}[X]$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
- On a
$$P\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X] \Leftrightarrow (P|Q \text{ et } Q|P) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q \text{ sont associés}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ tel que } P = \lambda Q$$
- Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On appelle PGCD de P etQ tout polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$P\mathbb{K}[X] + Q\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$$
Il existe un unique PGCD unitaire ou nul de P et Q. On le note $P \wedge Q$.
- Soit $(P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$.
On appelle PGCD de $P_1, \dots, P_n$ tout polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$P_1\mathbb{K}[X] + P_2\mathbb{K}[X] + \cdots + P_n\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$$
Il existe un unique PGCD unitaire ou nul de $P_1, \dots, P_n$, on le note $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$.
On appelle PPCM de $P_1, \dots, P_n$ tout polynôme $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$P_1\mathbb{K}[X] \cap P_2\mathbb{K}[X] \cap \cdots \cap P_n\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X]$$
Il existe un unique PPCM unitaire ou nul de $P_1, \dots, P_n$, on le note $P_1 \vee \cdots \vee P_n$.

18.6.2 polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$

- Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Ces polynômes sont *associés* s'ils vérifient une des assertions équivalentes suivantes :
  1. $P|Q$ et $Q|P$
  2. il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda A$
- On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ NON CONSTANT est *irréductible* lorsque ses seuls diviseurs sont les polynômes associés à 1 ou à P. Concrètement, P est irréductible lorsque $P = QH$ implique $Q \in \mathbb{K}$ ou $H \in \mathbb{K}$.
- Irréductibilité des polynômes de degré 1. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $X - \alpha$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
- 1. Les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes : $X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.
  2. Les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[X]$ sont :
     (a) Les polynômes de degré 1 de la forme $X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
     (b) Les polynômes de degré 2 de la forme $X^2 + pX + q$ avec $p^2 - 4q < 0$.
- Tout polynôme non constant P de $\mathbb{K}[X]$ est produit d'irréductibles.

- Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.
  Il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_n$ polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$ tels que
  $$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$$
  Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

18.7 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

18.7.1 éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Nous avons déjà vu (chapitre Groupes) que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ était un groupe commutatif. On définit, en vérifiant que la classe de congruence de $k\ell$ modulo n ne dépend que des classes de k et ℓ, une multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par :
  $$\overline{k} \times \overline{\ell} = \overline{k\ell}$$
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif, d'éléments neutres $\overline{0}$ et $\overline{1}$.
  Les éléments inversibles sont les classes des éléments premiers avec n :
  $$U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\overline{k} \mid k \wedge n = 1\}$$
- Pour trouver l'inverse de $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il suffit de trouver un couple de Bézout (u, v) tel que $ku + nv = 1$. Dans cette situation, $\overline{k} \times \overline{u} = \overline{1}$.
- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est un nombre premier. Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est aussi noté $\mathbb{F}_p$.

18.7.2 théorème chinois

- Théorème chinois
  Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ un couple d'entiers premiers entre eux. Les anneaux $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes par le morphisme d'anneaux :
  $$\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \overline{k} & \longmapsto & \left(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{k}}\right) \end{pmatrix}$$
- Théorème des restes chinois
  Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ un couple d'entiers premiers entre eux. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, le système
  $$\begin{cases} k & \equiv a\ [n] \\ k & \equiv b\ [m] \end{cases}$$
  admet une infinité de solutions. Si k_0 est une solution particulière, les solutions sont exactement les entiers congrus à k_0 modulo mn.

- Généralisation du théorème chinois
  Étant donné $n_1, \dots, n_r$ premiers entre eux deux à deux, les anneaux
  $$\mathbb{Z}/(n1 \dots n_r)\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$$
  sont isomorphes.

18.8 Indicatrice d'Euler

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire encore le nombre d'entiers de $[\![0, n-1]\!]$ premiers avec n.
  L'application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est appelée *indicatrice d'Euler*.

- Indicatrice d'Euler d'une puissance de nombre premier
  Soient p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$ Alors $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

- Si n et m sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux alors
$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

- Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec $p_1, \dots, p_r$ nombres premiers distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

- Théorème d'Euler.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour a entier relatif premier avec n, on a :
$$a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$$

18.9 Algèbres

- Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{A}$ un ensemble muni de deux lois internes $+$ et $\times$ ainsi que d'une loi externe ., c'est-à-dire d'une application :
$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{pmatrix}$$
  On dit que $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre* ou tout simplement *une algèbre* si
  1. $(\mathcal{A}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
  2. $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau
  3. $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathcal{A}^2$, $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$.

  Lorsque l'anneau est commutatif, l'algèbre est dite commutative.
- On appelle *sous-algèbre* d'une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, .)$, toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ qui est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ et un sous-espace vectoriel de $(A, +, .)$.
- Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Un *morphisme d'algèbres* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ qui est également un morphisme d'anneaux.

Chapitre 19

Réduction (2)

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, qui en pratique sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

19.1 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

19.1.1 définitions

- Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots = a_pX^p$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  On note $P(u)$ l'endomorphisme $P(u) = a_0\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} + a_1u + \cdots + a_pu^p \in \mathscr{L}(E)$.
  On note $P(A)$ la matrice $P(A) = a_0\mathbf{I_n} + a_1A + \ldots a_pA^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  On appelle *polynôme en u* tout endomorphisme de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes en u est noté $\mathbb{K}[u]$.
  On appelle *polynôme en A* toute matrice de la forme $P(A)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes en A est noté $\mathbb{K}[A]$.

- Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que $u(x) = \lambda x$. Alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On suppose que $AX = \lambda X$. Alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

19.1.2 sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

- Soit u un endomorphisme de E. L'application

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & P(u) \end{pmatrix}$$

  est un morphisme d'algèbres.
  L'image de ce morphisme, $\mathbb{K}[u]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$. On a

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application est un morphisme de d'algèbres. L'image de ce morphisme, $\mathbb{K}[A]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$P(A) \times Q(A) = (PQ)(A) = (QP)(A) = Q(A) \times P(A)$$

  On retiendra en particulier que deux polynômes en u commutent, que deux polynômes en A commutent.

19.1.3 lemme de décomposition des noyaux

- lemme de décomposition des noyaux - version 1
  Si P_1 et P_2 sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux, et si $u \in \mathscr{L}(E)$, on a :
  $$\ker(P_1P_2(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$$
- lemme de décomposition des noyaux - version 2
  Si $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux et de produit égal à P, et si $u \in \mathscr{L}(E)$, on a :
  $$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u))$$

19.2 Polynômes annulateurs et applications

19.2.1 généralités

- Soit u un endomorphisme de E. On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme annulateur de A tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

- L'ensemble des polynômes annulateurs de u est le noyau du morphisme d'algèbres
  $$\begin{pmatrix} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & P(u) \end{pmatrix}$$
  C'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, appelé *idéal annulateur* de u.

- Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un polynôme annulateur non nul. Il y a même une infinité de tels polynômes.
- Si A et B sont deux matrices semblables alors A et B ont les mêmes polynômes annulateurs.

19.2.2 utilité des polynômes annulateurs pour la réduction

- Si P est un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u, alors λ est racine de P :
  $$\mathrm{Sp}(u) \subset \{ \text{ racines de } P \text{ polynôme annulateur de } u \}$$
  Toutes les racines de P ne sont pas forcément valeurs propres de u.

- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
  u est diagonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

- Si u est diagonalisable, alors pour tout sous-espace vectoriel F stable par u, l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

- Théorème de Cayley-Hamilton
  Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie (ou d'une matrice) est un polynôme annulateur. Autrement dit, si E est de dimension finie,

$$\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \chi_A(A) = 0$$

- u est trigonalisable si, et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé.

19.3 Polynôme minimal et applications

19.3.1 généralités

- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. L'idéal annulateur de u admet un unique générateur unitaire appelé *polynôme minimal* de u, noté π_u.

$$\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}\} = \pi_u\,\mathbb{K}[X]$$

- L'idéal annulateur de la matrice A admet un unique générateur unitaire appelé *polynôme minimal* de A, noté π_A.

$$\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(A) = 0\} = \pi_A\,\mathbb{K}[X]$$

- Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(\mathrm{Id}, u, u^2, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
  Si d est le degré du polynôme minimal de A, alors la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

19.3.2 utilité du polynôme minimal pour la réduction

- Les valeurs propres de u (respectivement A) sont exactement les racines de son polynôme minimal.
- Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
  - Il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u.
  - Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

  Sous l'une de ces conditions, $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

  Le théorème s'adapte pour une matrice.

- Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
  - Il existe un polynôme scindé annulant u.
  - Le polynôme minimal de u est scindé.

  Le théorème s'adapte pour une matrice.

19.4 Sous-espaces caractéristiques

- Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. On appelle *sous-espace caractéristique* de u associé à la valeur propre λ le sous-espace $\ker((u-\lambda \operatorname{Id}_E)^m)$ où m est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ dans χ_u.
- Dimension d'un sous-espace caractéristique
  On a $\dim\ker((u-\lambda \operatorname{Id}_E)^m) = m$ où m est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ dans χ_u.
  Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. A est semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux égaux.
  Si $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$, A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} \lambda_2 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_2 \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{bmatrix} \lambda_r & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

19.5 Quelques applications de la réduction matricielle

— calculs de puissances

— système d'équations différentielles, suites récurrentes

— recherche d'un commutant

— équations matricielles (par exemple, recherche d'une racine carrée)

— recherche de sous-espace vectoriel stables.

Chapitre 20

Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

20.1 Produit scalaire

20.1.1 présentation et premiers exemples

- Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.
  Une application φ est un produit scalaire sur E si elle vérifie :
  1. $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ (bien vérifier que $\varphi(x, y)$ existe dans $\mathbb{R}$)
  2. φ est bilinéaire
  3. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
  4. $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$
  5. $\varphi(x, x) = 0$ implique $x = 0$.

  Il suffit de vérifier la linéarité à gauche et la symétrie pour justifier la bilinéarité.
  Un produit scalaire est noté $\langle ., . \rangle$ ou $\langle .|. \rangle$, ou $(.|.)$.
  On appelle norme euclidienne l'application, qui est en fait une norme sur E, définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

- On appelle *espace préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé *espace euclidien*.

20.1.2 exemples à maîtriser

1. Espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
2. Espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\mathrm{Tr}(A^\top B)$.
3. $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \langle .|. \rangle)$ est un espace préhilbertien réel, où $\quad \langle f|g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$
4. $(\mathbb{R}[X], \langle .|. \rangle)$ est un espace préhilbertien réel, où $\quad \langle P|Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$

   Il y a de nombreux produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$!

20.1.3 propriétés

- Pour x et y vecteurs de E, on a :
  - Identités remarquables :
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x|y\rangle\\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x|y\rangle\\ \|x\|^2-\|y\|^2 &= \langle x+y|x-y\rangle\end{aligned}$$
  - Formules de polarisation associées :
$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)$$
$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$
  - Règle du parallélogramme :
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$$
- Théorème de Pythagore
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2 \quad\Leftrightarrow\quad \langle x|y\rangle = 0$$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz

  Pour tous vecteurs x et y de E, on a : $\quad |\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|.\|y\|$

  Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si la famille (x,y) est liée.

- Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, tout $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, on a :
$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$
$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$
  Pour f et g fonctions continues sur $[a,b]$, on a :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t}$$
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t\right)$$
- Inégalité triangulaire

  Pour tous vecteurs x et y de E, on a l'inégalité triangulaire :
$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$$
  Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens (il existe $\alpha\geqslant 0$ tel que $x=\alpha y$ ou tel que $y=\alpha x$).

20.2 Familles orthogonales, orthonormales

20.2.1 propriétés des familles orthogonales

- Notions d'orthogonalité
  Soient x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E,
  et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
  – *Vecteurs*
  x et y sont orthogonaux si $\langle x|y\rangle = 0$.

  – *Famille de vecteurs*
  $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale si pour tous i et j de I avec $i \neq j$, $\langle v_i|v_j\rangle = 0$.
  $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale (ou orthonormée) si $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale constituée de vecteurs de norme 1.

  – *Ensembles*
  F et G sont des sous-espaces orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G : $\quad \forall (f,g) \in F \times G, \quad \langle f|g\rangle = 0$.

  Quand on norme les vecteurs d'une famille orthogonale, on obtient une famille orthonormale.

- Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. Toute famille orthonormale est libre.
- Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille orthogonale de E. On a le théorème de Pythagore généralisé :

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_p\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \cdots + \|v_p\|^2$$

20.2.2 bases orthonormales dans un espace euclidien

- Écriture d'un vecteur dans une base orthonormée
  Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour tout x de E :

$$x = \langle x|e_1\rangle e_1 + \langle x|e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle x|e_n\rangle e_n$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle^2$$

- Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$. On a :

$$\langle x|y\rangle = X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = X^\top X$$

- Procédé d'orthonormalisation de Schmidt
  Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille **libre** de E. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt consiste à définir les vecteurs $s_1, s_2, \ldots, s_p$ comme suit :

$$s_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\text{pour } i \geqslant 2, \quad s_i = \frac{u_i}{\|u_i\|} \quad \text{où} \quad u_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i | s_k \rangle s_k$$

La famille $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ ainsi construite est une famille orthonormale et

$$\forall r \in [\![1, p]\!], \text{ on a} \quad \text{Vect}(s_1, s_2, \ldots, s_r) = \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_r)$$

Si l'on recherche une famille orthogonale, pas forcément orthonormale, il faut quand même appliquer de la même façon le procédé de Schmidt.

- Théorème de la base incomplète
  Tout espace euclidien possède une base orthonormée. Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E peut être complétée en base orthonormée de E.

20.3 Orthogonal d'une partie

- Soit A une partie de E. *L'orthogonal de* A, noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \ \langle x | y \rangle = 0\}$$

  C'est un sous-espace vectoriel de E. On a : $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
- $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.
  Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E.
- F et G sont orthogonaux $\Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow F \perp G \Leftrightarrow G \subset F^\perp$
  Il n'y a pas forcément égalité.

- Soit E un espace préhilbertien réel (de dimension finie ou non) et F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E.
  - $F^\perp$ est un supplémentaire de F orthogonal à F, et c'est même le seul. On l'appelle *supplémentaire orthogonal* de F.
  $$F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$$
  - On a $(F^\perp)^\perp = F$.

20.4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

- On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E pour lequel $F \oplus F^\perp = E$. On appelle projection orthogonale sur F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

- Caractérisation de $p_F(x)$
  $p_F(x)$ est caractérisé par : $\begin{cases} p_F(x) & \in F \\ x - p_F(x) & \in F^\perp \end{cases}$
  En écrivant ces deux conditions, on obtient des équations qui nous permettront de trouver $p_F(x)$.

- Expression de $p_F(x)$ dans une base orthonormée de F
  On considère la projection orthogonale sur F, notée p_F. Soit $(v_1, v_2, \dots v_p)$ une base orthonormale de F. On insiste sur le fait que $p = \dim F$. Pour tout x de E, on a :

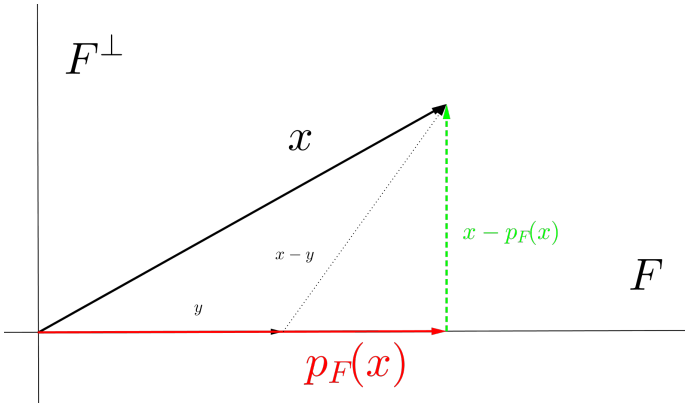
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x|v_i\rangle v_i$$

20.4.1 distance à un sous-espace de dimension finie

La distance de x à l'ensemble A est $d(x, A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$.
Théorème de meilleure approximation : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. La distance de x à F est atteinte en $p_F(x)$, où p_F désigne la projection orthogonale sur F. Autrement dit,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

De plus, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y de F tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.



20.4.2 cas particulier des hyperplans

Il faut savoir déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un hyperplan H, et la distance de ce vecteur à H.

Chapitre 21

Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans tout le chapitre E désigne un espace euclidien, muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

21.1 Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée

Pour tout vecteur de E, on a la décomposition dans une base orthonormée :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Donc les coordonnées de $u(e_j)$ relativement aux e_i valent $\langle u(e_j), e_i \rangle$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u(e_1), e_1 \rangle & \langle u(e_2), e_1 \rangle & \dots & \langle u(e_n), e_1 \rangle \\ \langle u(e_1), e_2 \rangle & \langle u(e_2), e_2 \rangle & \dots & \langle u(e_n), e_2 \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle u(e_1), e_n \rangle & \langle u(e_2), e_n \rangle & \dots & \langle u(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix} = M$$

21.2 Adjoint d'un endomorphisme

- Théorème de représentation des formes linéaires
  Pour toute forme linéaire φ, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

  $$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant :

  $$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

  Cet endomorphisme u^* s'appelle *l'adjoint* de u.

- Propriétés de $u \mapsto u^*$
  Linéarité : l'application $u \mapsto u^*$ est linéaire.
  Involution : l'application $u \mapsto u^*$ est involutive, c'est-à-dire que $(u^*)^* = u$.
  Composition : $(u \circ w)^* = w^* \circ u^*$.
  Inversibilité : si u est bijective, u^* l'est aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. On a $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$.
  Il s'ensuit que les endomorphismes u et u^* ont même rang, même déterminant, même trace et même polynôme caractéristique.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

21.3 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

- On appelle *projecteur orthogonal* de E tout projecteur sur un sous-espace vectoriel F et parallèlement à $F^\perp$.
  On appelle *symétrie orthogonale* de E toute symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F parallèlement à $F^\perp$.
  On appelle *réflexion* de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

- Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$).

$$p \text{ est un projecteur orthogonal } \Leftrightarrow p^* = p$$

21.4 Matrices orthogonales

21.4.1 caractérisation des matrices orthogonales

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $A^\top A = I_n = AA^\top$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :
  1. A est une matrice orthogonale
  2. la famille $(C_1, \dots, C_n)$ des colonnes de A est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
  3. la famille $(L_1, \dots, L_n)$ des lignes de A est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$).
- Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont *orthogonalement semblables* s'il existe une matrice orthogonale P telle que
$$B = P^{-1}AP = P^\top AP$$
  A et B représentent alors le même endomorphisme dans deux bases orthonormales.

21.4.2 groupe orthogonal

Si A est une matrice orthogonale, $\det(A^\top A) = \det(I_n)$, donc $(\det(A))^2 = \det(A^\top)\det(A) = 1$ et donc $\det(A) = \pm 1$. Ceci nous amène à distinguer deux types de matrices orthogonales.

- L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe orthogonal* et noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.
- Une matrice orthogonale A est dite *positive*, ou *directe*, si $\det A = 1$.
  L'ensemble des matrices orthogonales positives est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$.
- Une matrice orthogonale A est dite *négative*, ou *indirecte*, si $\det A = -1$.
  L'ensemble des matrices orthogonales négatives n'est pas un groupe.

21.4.3 orientation d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a vu que P était une matrice orthogonale, donc son déterminant est égal à 1 ou à -1.
On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ *définissent la même orientation* si $\det(P) = 1$.
Orienter l'espace consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de E. Toutes les bases qui définissent la même orientation sont dites directes. Les autres sont dites indirectes.

21.5 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Dans d'anciens sujets de concours, vous pouvez rencontrer la terminologie *automorphisme orthogonal* à la place de *isométrie vectorielle*.

- Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
  1. u conserve la norme : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.
  2. u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
  3. u conserve les bases orthonormées : pour $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

  On dit alors que u est une *isométrie vectorielle* de E.

- L'ensemble des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé *groupe orthogonal* de E et noté $\mathrm{O}(E)$.

- Soit u un endomorphisme de E.

$$u \text{ est une isométrie vectorielle } \Leftrightarrow \begin{cases} u & \text{est bijectif} \\ u^{-1} & = u^* \end{cases}$$

- Un endomorphisme est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

- Le déterminant d'une isométrie vaut 1 ou -1.
  - Une isométrie u est dite *positive*, ou *directe*, si son déterminant vaut 1.
    L'ensemble des isométries positives est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $\mathrm{SO}(E)$.
  - Une isométrie u est dite *négative*, ou *indirecte*, si son déterminant vaut -1. L'ensemble des isométries négatives n'est pas un groupe.

21.6 Isométries vectorielles en dimension 2

- $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
  Plus précisément,

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ M = R(\theta) \\ M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ M = S(\theta) \end{aligned}$$

- Pour θ, θ' réels, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta')$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif et isomorphe à $\mathbb{U}$.

- Ici E est un espace euclidien orienté de dimension 2. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$.
  - Si $u \in \mathrm{SO}(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$, on ait $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$. On dit que u est une *rotation d'angle* θ.
  - Si $u \in \mathrm{O}(E)\backslash\mathrm{SO}(E)$, alors il existe une base orthonormée dans laquelle $\mathrm{mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et u est une réflexion.

21.7 Réduction des isométries

21.7.1 cas général

- Pour $u \in \mathrm{O}(E)$, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.
- Si F est stable par l'isométrie vectorielle u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.
- Tout endomorphisme (pas nécessairement une isométrie) d'un espace vectoriel de dimension finie admet une droite ou un plan stable.
- Théorème de réduction des isométries
  Soit une isométrie vectorielle $u \in \mathrm{O}(E)$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme (1), (-1) et $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

21.7.2 réduction des isométries positives en dimension 3

Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que u est une rotation d'angle θ.

Il existe une droite D et un plan $P = D^\perp$ tel que $u_D = \mathrm{Id}_D$ et u_P soit une rotation.

21.8 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

21.8.1 généralités

- On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *autoadjoint* si $u^* = u$, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

  On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E.

$$u \in \mathcal{S}(E) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$$

- Un endomorphisme autoadjoint est parfois appelé endomorphisme symétrique, en vertu de la propriété précédente, et cela explique la notation $\mathcal{S}(E)$.
- $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, et $\dim \mathcal{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- Soit p un projecteur de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
  1. p est un projecteur orthogonal.
  2. p est un endomorphisme autoadjoint.
  3. $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p)$ est une matrice symétrique.

21.8.2 réduction des endomorphismes autoadjoints

- Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

- Théorème spectral
  Si u est un endomorphisme autoadjoint de E, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale. Plus précisément, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :
  1. u est autoadjoint.
  2. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.
  3. $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$
- Toute matrice symétrique **réelle** A est orthogonalement diagonalisable : il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que
$$A = PDP^\top$$

21.8.3 endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

- Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
  - On dit que u est autoadjoint *positif* si : $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$.
  - On dit que u est autoadjoint *défini positif* si : $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$, ou de manière équivalente :
$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (\langle u(x), x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$$
- On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E.
- Caractérisation spectrale
  Soit u un automorphisme autoadjoint.
$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}^+(E) &\Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+ \\ u \in \mathcal{S}^{++}(E) &\Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$
- Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice :
  - *symétrique positive* si :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX = \langle AX, X\rangle \geqslant 0 \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$$
  - *symétrique définie positive* si :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\top AX = \langle AX, X\rangle > 0 \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$$

Chapitre 22

Probabilités et lois de variables aléatoires discrètes

22.1 Révisions de dénombrement (MPSI)

- Un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection f de E dans $[\![1, n]\!]$.
  n est appelé cardinal de E et noté $\operatorname{Card} E$; il représente concrètement le nombre d'éléments de E.
  L'ensemble vide $\emptyset$ est fini de cardinal 0.
- pour $A_1, \dots, A_p$ des sous-ensembles DISJOINTS de E,

$$\operatorname{Card}(\bigcup_{i=1}^{p} A_i) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Card} A_i$$

  En particulier, $\operatorname{Card} A + \operatorname{Card} \overline{A} = \operatorname{Card} E$.
- pour $F_1, \dots, F_p$ ensembles,

$$\operatorname{Card}(F_1 \times \cdots \times F_p) = (\operatorname{Card} F_1) \times \cdots \times (\operatorname{Card} F_p)$$

- $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}$
- pour A et B sous-ensembles de E, $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$

- Si f est injective et si F est fini, alors E est aussi fini. On a $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$, avec égalité si et seulement si f est bijective.
- Si f est surjective et si E est fini, alors F est aussi fini. On a $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$, avec égalité si et seulement si f est bijective.
- Si E et F sont finis et de même cardinal :
  f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

- Une p-liste ou p-uplet de E est un élément de E^p, c'est-à-dire une liste $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in E$. Dans une p-liste, l'ordre a de l'importance et il peut y avoir répétition. Le nombre de p-listes d'éléments de E est $(\operatorname{Card} E)^p$.

- Un p-arrangement de E est une p-liste d'éléments distincts. Dans un p-arrangement, l'ordre a de l'importance et on n'autorise pas les répétitions. En notant $n = \operatorname{Card} E$, le nombre de p-arrangements de E est

$$\begin{cases} n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} \text{ si } n \geqslant p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Un n-arrangement de E est appelé permutation. Il y en a $n!$.
  Les listes sont utilisées pour modéliser des tirages SUCCESSIFS AVEC REMISE.
  Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages SUCCESSIFS SANS REMISE.

- On appelle p-combinaison de E toute partie de E de cardinal p. On note $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ une telle partie. Dans une partie, l'ordre n'a pas d'importance et il n'y a pas de répétition.
  Le nombre de p-combinaisons de E est

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages SIMULTANÉS.

- Tirages simultanés dans des sous-ensembles disjoints
  Soient E_1, E_2,...E_p des sous-ensembles DISJOINTS d'un ensemble E, à respectivement N_1, $N_2, \ldots, N_p$ éléments.
  Le nombre de parties de E comportant n_1 éléments dans E_1, n_2 éléments dans E_2,..., n_p éléments dans E_p est $\binom{N_1}{n_1} \times \binom{N_2}{n_2} \times \cdots \times \binom{N_p}{n_p}$.

- Propriétés des coefficients binomiaux. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
  — $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$
  — Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-k}$ Formule de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
  — Formule du capitaine : $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ ou de factorisation : $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

22.2 Espace probabilisable

22.2.1 expérience aléatoire et univers

22.2.2 cas d'un univers fini

- Ici $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}$ est fini. Une probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :
  — $P(\Omega) = 1$
  — pour A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé espace probabilisé fini.

- Soient p_1, p_2,..., p_n des réels. Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ si, et seulement si, les réels p_i sont positifs et de somme 1. Dans ce cas, la probabilité d'un événement A se calcule par

$$P(A) = \sum_{i/\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i/\omega_i \in A} p_i$$

On calcule dans ce cas la probabilité d'un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ par :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

22.2.3 notion de tribu

- On appelle *tribu* sur Ω tout sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :
  - Ω appartient à $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$
  - $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable :
    si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

  Un ensemble d'une tribu est appelé *événement*.
  On appelle espace probabilisable associé à une expérience aléatoire la donnée de l'ensemble des résultats possibles Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ d'événements.

- Soit $\mathcal{A}$ une tribu. On a les propriétés :
  - $\mathcal{A}$ contient $\emptyset$
  - $\mathcal{A}$ est stable par union finie : si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dans $\mathcal{A}$, alors $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ appartient à $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie : si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dans $\mathcal{A}$, alors $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ appartient à $\mathcal{A}$
  - soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ appartient à $\mathcal{A}$.

- Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle *système complet d'événements*, toute famille, finie ou infinie dénombrable, $(A_i)_{i\in I}$ telle que :
  - les A_i sont des événements : $A_i \in \mathcal{A}$
  - les A_i sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$
  - l'union des A_i est Ω : $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$.

22.3 Application probabilité sur un espace probabilisable

- Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle *probabilité* toute application $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant :
  - $P(\Omega) = 1$

— P est $\sigma-$additive, c'est-à-dire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements 2 à 2 incompatibles, alors : $P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$

L'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une probabilité P est appelé espace probabilisé.

- Propriété d'additivité :

  pour $A_1, A_2, ..., A_N$ deux à deux incompatibles, $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N) = P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_N)$

- On a les propriétés élémentaires :
  1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
  2. Si $A \subset B$, $\quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
  3. Si $A \subset B$, $\quad P(A) \leqslant P(B)$. Cette propriété s'appelle la croissance de P.
  4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Théorème de continuité monotone
  - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements, c'est-à-dire telle que $A_n \subset A_{n+1}$. Alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

  - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire telle que $A_{n+1} \subset A_n$. Alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

  - Corollaire. Pour toute suite (A_n) d'événements,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

- Sous-additivité de P
  $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$ et $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) \leqslant +\infty$
- On appelle *système quasi-complet d'événements* toute famille au plus dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$.
- Formule des probabilités totales
  Pour tout système quasi-complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$ et tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B)$$

- Tout événement de probabilité nulle est dit *négligeable*. Tout événement de probabilité 1 est dit *presque sûr* ou *presque certain*.
  Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.
  Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

- Une *distribution de probabilités discrète* sur un ensemble Ω est une famille sommable $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs, de somme 1.
  Son *support* est l'ensemble $\{\omega \in \Omega \,|\, p_\omega \neq 0\}$. Cet ensemble est au plus dénombrable.
- Soit Ω un ensemble au plus dénombrable. Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrète, il existe une unique probabilité P définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = P(\{\omega\})$; elle est définie par :
$$P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$
  L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé *espace probabilisé discret*.

22.4 probabilités conditionnelles et indépendance

22.4.1 trois grandes formules de probabilités

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$. On appelle *probabilité conditionnelle sachant A* l'application P_A définie sur $\mathcal{A}$ par : $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$. On peut aussi noter $P_A(B) = P(B|A)$.
- P_A est une probabilité, autrement dit $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé. Par conséquent, **toutes** les propriétés relatives aux espaces probabilisés sont valables pour P_A.

- Formule des probabilités composées
  Soient A_1, A_2,..., A_n des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a :
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times P_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4) \times ... \times P_{A_1\cap A_2\cap ...A_{n-1}}(A_n)$$

- Formule des probabilités totales
  Soit J une partie de $\mathbb{N}$ et $(B_j)_{j\in J}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement A, on a :
$$P(A) = \sum_{j\in J} P(B_j)P_{B_j}(A)$$
  Cette formule reste vraie pour un système quasi-complet d'événements.
  Pour éviter les complications, on convient souvent dans cette formule que $P(B_j)P_{B_j}(A) = 0$ si $P(B_j) = 0$, ce qui permet de l'utiliser même sans savoir que les événements du système complet sont de probabilités non nulles.

- Formule de Bayes
  On dispose d'un système complet d'événements $(B_j)_{j\in J}$ et d'un événement A de probabilité non nulle. On a :
$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{j\in J} P(B_j)P_{B_j}(A)}$$

22.4.2 événements indépendants

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Les événements A et B sont indépendants si
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
- Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.
Les événements sont 2 à 2 indépendants si $\forall i \neq j$, les événements A_i et A_j sont indépendants.
Les événements sont (mutuellement) indépendants si pour toute partie finie J de I on a :
$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$
- Si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants, et si pour tout indice i, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors $(B_i)_{i\in I}$ est aussi une famille d'événements indépendants.

22.5 Variables aléatoires discrètes

22.5.1 généralités

- Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et E un ensemble non vide. On appelle *variable aléatoire discrète* toute application $X : \Omega \to E$ vérifiant :
$X(\Omega)$ est au plus dénombrable
pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.
- Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans E. Pour toute partie A de E, l'ensemble :
$$\{X \in A\} = (X \in A) = \{\omega \in A \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$$
est un événement.
- Soit X une variable aléatoire discrète. La famille $\{(X = x)\}_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé *système complet d'événements associé à X.*

22.5.2 loi de probabilité

- Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La *loi de X* est :
$$P_X : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}\right)$$
P_X est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

  Il s'ensuit que $P(X \in A) = \sum_{x\in A} P(X = x)$ et donc que la loi de X est déterminée par la distribution de probabilité discrète $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.

- Existence d'une variable aléatoire de distribution de probabilités donnée
Soit $(p_x)_{x\in E}$ une distribution de probabilités définie sur un ensemble E au plus dénombrable.
Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire discrète X de loi donnée par $(p_x)_{x\in E}$.

- Loi conditionnelle sachant un événement
  Soit A un événement de probabilité non nulle et X une variable aléatoire discrète.
  La *loi conditionnelle de X sachant A* est la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$. Elle est donc déterminée par des probabilités $P_A(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

22.5.3 transformée d'une variable aléatoire

Pour X variable aléatoire discrète et f une application définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$, $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète, notée $f(X)$.
Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

22.6 Lois usuelles

22.6.1 loi certaine

On dit que la variable aléatoire X suit la loi certaine ou qu'elle est presque sûrement constante s'il existe $a \in E$ tel que $P(X = a) = 1$.

22.6.2 loi uniforme

On dit que la variable aléatoire X suit une *loi uniforme* sur un ensemble fini E si :

$$X(\Omega) = E \text{ et pour tout } x \in E,\ P(X = x) = \frac{1}{\operatorname{Card} E}$$

Pour $X \sim U(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\quad \forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \frac{1}{n}$.

22.6.3 loi de Bernoulli

- On dit que la variable aléatoire X suit la *loi de Bernoulli de paramètre* $p \in [0, 1]$ si :

  $$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et } P(X = 1) = p$$

  On note $X \sim b(p)$ ou $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.

- Pour A événement, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$, indicatrice de l'événement A :

  $$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

22.6.4 loi binomiale

- On dit que X suit une *loi binomiale de paramètres* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0, 1]$, et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, lorsque :

  $$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour } k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

- Modèle du nombre de succès
  On réalise une succession de n épreuves de Bernoulli, de probabilité de succès $p \in [0, 1]$, indépendantes. La variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètres n et p.

22.6.5 loi géométrique

- On dit que X suit une *loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$, et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$, lorsque
$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$
- Modèle du temps d'attente
On réalise des épreuves de Bernoulli successives indépendantes de probabilité de succès $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires à l'obtention du premier succès. On a $X \sim \mathcal{G}(p)$.

22.6.6 loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire réelle discrète X suit *une loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, lorsque
$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et pour } k \in \mathbb{N}, P(X=k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

22.7 Couples et uplets de variables aléatoires

22.7.1 couples de variables aléatoires discrètes

- Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs respectivement dans E et F. L'application $(X,Y) : \Omega \to E \times F$ est une variable aléatoire discrète, appelée *loi conjointe* de X et Y.
Donner la loi du couple (X,Y), c'est donner $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, et les valeurs :
$$P(X=x, Y=y) = P((X=x) \cap (Y=y)) \text{ pour tout } (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$
- Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Y=y])_{y \in Y(\Omega)}$, on peut obtenir la loi (dite loi marginale) de X :
$$P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y)$$
et de même, avec le système complet d'événements $([X=x])_{x \in X(\Omega)}$, on peut obtenir la loi marginale de Y :
$$P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=y)$$
- Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs respectivement dans E et F.
Les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si pour toute partie A de E et toute partie B de F, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
- Caractérisation de l'indépendance
Les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si
$$\text{pour tout } (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$$
- Transfert d'indépendance
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et pour toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

22.7.2 familles finies de variables aléatoires discrètes

- Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i est une variable discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un ensemble E_i, alors $X = (X_1, \dots, X_n)$ est une variable discrète à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.
- La loi de X est appelée loi conjointe et les lois des variables X_i sont appelées lois marginales.
- Chaque loi marginale se retrouve à partir de la loi conjointe.
  En posant $F_i = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$,

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall t \in X_i(\Omega), \quad P(X_i = t) = \sum_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)\in F_i} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = t, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

- Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Les variables sont dites (mutuellement) indépendantes si on a l'une des deux assertions équivalentes suivantes :
  1. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$.
  2. Pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

- Lemme des coalitions
  Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$.

22.7.3 suites de variables aléatoires discrètes

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Les variables X_n sont *indépendantes* si toute sous-famille $(X_i)_{i\in I}$ avec I partie finie de $\mathbb{N}$ est constituée de variables aléatoires indépendantes.
- Si les variables X_n suivent de plus toutes la même loi, on dira que la suite est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées ou, en abrégé, une suite de variables i.i.d.

- Théorème d'extension de Kolmogorov
  Soit $(\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois discrètes sur des ensembles E_n. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, $X_n \sim \mathcal{L}_n$.
  Pour nous, ce théorème sert uniquement à légitimer certains énoncés. Par exemple, il permet de donner un cadre théorique au jeu de pile ou face infini.

Chapitre 23

Moments

23.1 Espérance

23.1.1 existence et calcul

- Espérance – cas positif
  Quand X est une variable aléatoire réelle positive, on définit son espérance dans $[0, +\infty]$ par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

- Espérance – cas sommable
  Soit X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que X est *d'espérance finie*lorsque la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de X est :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

  et on note $X \in L^1$.

- Toute variable aléatoire bornée admet une espérance finie.

- Lois usuelles
  - On rappelle que l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est np, et l'espérance de $\mathbb{1}_A$ est $P(A)$.
  - X de loi géométrique de paramètre p est d'espérance finie égale à $\frac{1}{p}$.
  - X de loi de Poisson de paramètre λ est d'espérance finie égale à λ.

- Formule de transfert
  Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{C}$. La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. On a alors :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

- Calcul de l'espérance par antirépartition
  Ici, on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

- Théorème de domination
  Si X et Y sont deux variables aléatoires vérifiant $0 \leqslant |X| \leqslant Y$. Si Y est d'espérance finie, alors X est aussi d'espérance finie.

- Dans cette propriété, X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (en fonction de ce qui a du sens !).

  Linéarité de l'espérance : Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie.
  Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et on a :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$$

  Action « centrer » : si X est d'espérance finie, $X - \mathrm{E}(X)$ est centrée.
  Positivité de l'espérance : si $X \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$. De plus,

$$\begin{cases} X & \geqslant 0 \\ \mathrm{E}(X) & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X = 0 \text{ presque sûrement}$$

  Croissance de l'espérance : si X et Y sont d'espérance finie et $X \leqslant Y$, on a $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.
  Inégalité triangulaire : X est d'espérance finie si, et seulement si, $|X|$ est d'espérance finie et dans ce cas, on a

$$|\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(|X|)$$

- Linéarité de l'espérance. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires de L^1. On a :

$$\mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)$$

- Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie et **indépendantes**. On a

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

  Plus généralement, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont d'espérance finie et indépendantes, $X_1 X_2 \ldots X_n$ est d'espérance finie et on a :

$$\mathrm{E}\left(X_1 X_2 \ldots X_n\right) = \mathrm{E}\left(X_1\right) \mathrm{E}\left(X_2\right) \ldots \mathrm{E}\left(X_n\right)$$

23.2 Variance d'une variable aléatoire réelle

23.2.1 variables aléatoires dont le carré est d'espérance finie

- La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. Conformément au programme, on ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.

- Si $\mathrm{E}\left(X^2\right) < +\infty$, alors X est d'espérance finie. Dit autrement,
$$X \in L^2 \;\Rightarrow\; X \in L^1$$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
Si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et on a :
$$|\mathrm{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\left(X^2\right)}\,\sqrt{\mathrm{E}\left(Y^2\right)}$$
Il y a égalité si et seulement si X et Y sont proportionnelles presque sûrement.

23.2.2 définition et propriétés de la variance

- Pour $X \in L^2$, on appelle *variance* de X le réel positif donné par
$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$$
et *écart-type* de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

- Pour a et b réels, $aX + b \in L^2$ et on a $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.
- $\mathrm{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire presque-sûrement constante.
- Formule de Kœnig-Huygens
$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$
- Une variable aléatoire d'espérance valant 0 et de variance égale à 1 est dite *centrée réduite*. Pour $X \in L^2$ de variance non nulle, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}$ est une variable aléatoire centrée et réduite.

- Lois usuelles
  - On rappelle que la variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $np(1 - p)$.
  - X de loi géométrique de paramètre p est de variance finie égale à $\frac{1-p}{p^2}$.
  - X de loi de Poisson de paramètre λ est de variance finie égale à λ.

23.3 Covariance de deux variables aléatoires de L^2

- Pour X et Y dans L^2, la variable aléatoire $(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))$ est d'espérance finie et cette espérance est la *covariance* de X et Y :
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))\right)$$
Dans la pratique, on peut calculer la covariance de X et Y par la formule de Kœnig-Huygens suivante :
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$
- Soient X et Y dans L^2. Alors $X + Y$ est dans L^2 et on a :
$$\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$
- Pour toute famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires de L^2, la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est dans L^2 et on a :
$$\mathrm{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

23.4 Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

23.4.1 inégalités de concentration

- Inégalité de Markov
  Soit X une variable aléatoire réelle, à valeurs positives et d'espérance finie. On a

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$$

  Sans l'hypothèse de positivité de X, on pourra écrire :

$$\forall a > 0, \quad P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
  Soit X une variable aléatoire réelle, admettant un moment d'ordre 2. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\Big(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

23.4.2 loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et de variance finie. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$.

23.5 Fonctions génératrices

Dans toute cette partie, on ne considère que des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- La fonction génératrice de la variable aléatoire X est définie par :

$$G_X : t \mapsto \mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n$$

  On appelle série génératrice la série entière associée. On note R son rayon de convergence. Cette série converge pour $t = 1$ et $G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$.
  Donc $R \geqslant 1$.

- La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est déterminée par G_X. Plus précisément, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

  Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction génératrice.

- Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

- Soit une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  — $X \in L^1$ si, et seulement si, G_X est dérivable en 1. On a alors :
  $$\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$$
  — $X \in L^2$ si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1. On a alors :
  $$\mathrm{E}(X(X-1)) = G''_X(1)$$
  et il faut savoir en déduire $\mathrm{V}(X)$ par la formule de Huygens.

- Si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors
$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y$$

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors
$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n} = G_{X_1}.G_{X_2} \dots G_{X_n}$$

Loi	$X(\Omega)$	Notation	Expression de P_X	Espérance	Variance	Fonction génératrice $G_X(t)$
Loi uniforme	Fini		$P(X=x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(X(\Omega))}$			
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$\mathcal{B}(p)$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p-p^2$	$(1-p)+pt$
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$	$\{0,\cdots,n\}$	$\mathcal{B}(n,p)$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$((1-p)+pt)^n$
Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	$\mathcal{G}(p)$	$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$
Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$

Annexe A

Nombres, trigonométrie, suites, fonctions (MPSI)

A.1 Nombres

$\mathbb{N}$: nombres entiers naturels

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.
- Principe de récurrence :
  Si $P(0)$ est vraie et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors , $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$: nombres entiers relatifs

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- Division euclidienne : pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

$\mathbb{Q}$: nombres rationnels

- $(Q, +, \times)$ est un corps.
- Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et son complémentaire.

$\mathbb{R}$: nombres réels

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.
- $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
  $\leqslant$ est compatible avec l'addition : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$
  $\leqslant$ est compatible avec la multiplication pour les réels positifs :
  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b \Rightarrow a \times c \leqslant b \times c$
- Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.
- Inégalités triangulaires :
$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$$
- La partie entière $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ d'un nombre réel x est définie par $n \leqslant x < n + 1$.

- Valeurs décimales approchées de x à la précision 10^{-n} par défaut : $10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$,
  Valeurs décimales approchées de x à la précision 10^{-n} par excès : $10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor + 10^{-n}$
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ quand c'est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire
  $\forall (x,y)\in I^2,\ \forall t\in[0,1],\ tx+(1-t)y\in I$

$\mathbb{C}$: nombres complexes

- $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps.
- Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $z=a+\mathrm{i}b$
  - partie réelle de z : $\operatorname{Re} z=a$
  - partie imaginaire de z : $\operatorname{Im} z=b$
  - conjugué de z : $\overline{z}=a-\mathrm{i}b$
  - module de z : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
  - $|z|^2=z\overline{z}$
- Inégalités triangulaires : $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$.
- Complexes de module 1 :
  - $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}\ /\ |z|=1\}$
  - $|z|=1\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R},\ z=e^{\mathrm{i}\theta}$
  - $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$, $\cos\theta=\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2i}$,
  - Formule de Moivre : $(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)$
- Écriture d'un nombre complexe sous forme trigonométrique :
  $\forall z\in\mathbb{C},\ \exists r\in\mathbb{R}^+,\ \exists\theta\in\mathbb{R},\ z=re^{\mathrm{i}\theta}$. On dit que θ est un argument de z.
- Si θ_1 et θ_2 sont des arguments de z_1 et de z_2, alors $\theta_1+\theta_2$ est un argument de z_1z_2 et $\theta_1-\theta_2$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
- Angle moitié (à savoir refaire !)

$$1+e^{\mathrm{i}t}=e^{\mathrm{i}t/2}(e^{-\mathrm{i}t/2}+e^{\mathrm{i}t/2})=2\cos(\tfrac{t}{2})e^{\mathrm{i}t/2}$$

$$1-e^{\mathrm{i}t}=e^{\mathrm{i}t/2}(e^{-\mathrm{i}t/2}-e^{\mathrm{i}t/2})=2\mathrm{i}\sin(\tfrac{t}{2})e^{\mathrm{i}t/2}$$

$$e^{\mathrm{i}p}+e^{\mathrm{i}q}=e^{\mathrm{i}(p+q)/2}(e^{\mathrm{i}(p-q)/2}+e^{\mathrm{i}(q-p)/2})=2\cos(\tfrac{p-q}{2})e^{\mathrm{i}(p+q)/2}$$

$$e^{\mathrm{i}p}-e^{\mathrm{i}q}=e^{\mathrm{i}(p+q)/2}(e^{\mathrm{i}(p-q)/2}-e^{\mathrm{i}(q-p)/2})=2\mathrm{i}\sin(\tfrac{p-q}{2})e^{\mathrm{i}(p+q)/2}$$

- Racines $n-$ièmes de l'unité : $\omega_k=e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$, avec $k\in[\![0,n-1]\!]$, ${\omega_k}^n=1$, $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k=0$.

$$\mathbb{U}_n=\{z\in\mathbb{C}\mid\ z^n=1\}=\{w_k,\ k\in[\![0,n-1]\!]\}$$

- $j=e^{2\mathrm{i}\pi/3}=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $\quad j^3=1$, $\quad\overline{j}=j^2$, $\quad 1+j+j^2=0$.

Quelques formules

- Formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2$

  (encore vrai si a et b sont deux éléments d'un anneau tels que $ab = ba$.)
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

- Inégalité de Minkowski : $\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|,$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

- Somme géométrique : Sommes de suites géométriques (raison différente de 1) et de séries géométriques (raison dans $]-1,1[$) :

$$\sum_{k=d}^{a} q^k = 1^{\text{er}} \text{ terme } \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{ nombre-de-termes}}}{1 - \text{ raison}} = q^d \ \frac{1-q^{a-d+1}}{1-q}$$

$$\sum_{k=d}^{+\infty} q^k = 1^{\text{er}} \text{ terme } \times \frac{1}{1 - \text{ raison}} = q^d \cdot \frac{1}{1-q}$$

- Sommes de suites arithmétiques :

  pour u suite arithmétique :

$$\sum_{k=d}^{a} u_k = \frac{(\text{nombre de termes})(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

- Sommation exponentielle.

$$\text{Pour } z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

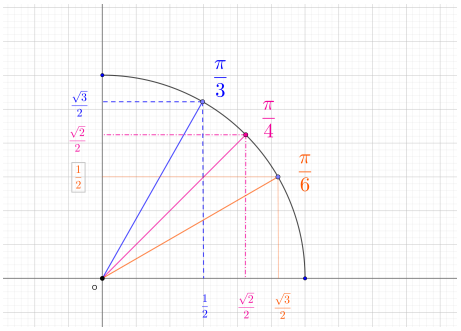
- $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k, \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Interversion de deux sommes : $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}$
- Symbole de Kronecker $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$
- Formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

A.2 Trigonométrie

θ, x, a, b, p, q sont des réels, n est un entier.

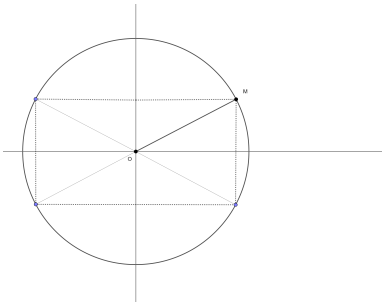
1. **Valeurs remarquables**

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$



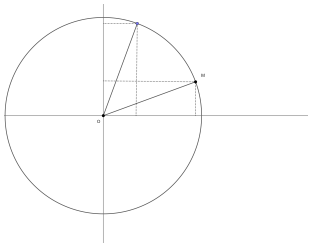
2. **Angles associés**

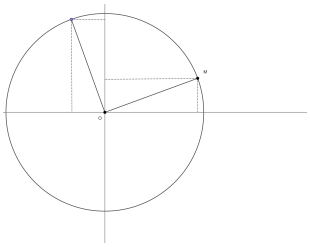
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$



$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$





3. **Euler et Moivre**
$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$
$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \qquad e^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$
Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Formules de Moivre

$$(e^{\mathrm{i}\theta})^n = e^{\mathrm{i}n\theta} \quad \text{soit} \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

4. **Relations entre cosinus, sinus et tangente**

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

5. **Formules d'addition**

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\quad$ $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\quad$ $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$
$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ $\quad$ $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ $\quad$ $\tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

6. En particulier, les formules d'addition fournissent les formules de duplication et triplication :

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ $\quad$ $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ $\quad$ $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

7. **Formules de linéarisation**

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

8. **Expression de cosinus et sinus en fonction de la tangente de l'angle moitié**

$$\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{où } t = \tan\frac{a}{2}$$

9. **Passage d'un produit à une somme** à l'aide des formules d'addition

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))\\ \sin(a)\sin(b) &= -\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))\\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))\end{aligned}$$

10. **Passage d'une somme à un produit**

$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ $\quad$ $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ $\quad$ $\sin(p)-\sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

11. **Résolutions d'équations trigonométriques – Faire un schéma !**

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\quad (a = b+2k\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2k\pi)$$

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\quad (a = b+2k\pi \text{ ou } a = -b + 2k\pi)$$

A.3 Suites numériques

1. **Limites avec les rangs**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell &: \quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\geqslant N\quad |u_n-\ell|<\varepsilon\\ \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty &: \quad \forall A\in\mathbb{R}\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\geqslant N\quad u_n\geqslant A\\ \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty &: \quad \forall A\in\mathbb{R}\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\geqslant N\quad u_n\leqslant A\end{aligned}$$

2. **Relation d'ordre et limite**
   - Si (u_n) converge vers ℓ et si à partir d'un certain rang, $u_n < a$ alors $\ell \leqslant a$.
     Si (u_n) converge vers ℓ et si à partir d'un certain rang, $u_n > a$ alors $\ell \geqslant a$

- Si (u_n) converge vers $\ell > a$, alors à partir d'un certain rang $u_n > a$.
  Si (u_n) converge vers $\ell < a$, alors à partir d'un certain rang $u_n < a$.

3. **Théorèmes apportant la convergence**
   - Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement :
     Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge également vers ℓ.
   - Théorème de la limite monotone : Pour une suite croissante, il n'y a que deux cas de figure :
     — soit la suite est majorée, et dans ce cas, elle converge vers un réel ℓ,
     — soit la suite tend vers $+\infty$ (et elle n'est pas majorée).

     Pour une suite décroissante, il n'y a que deux cas de figure :
     — soit la suite est minorée, et dans ce cas, elle converge vers un réel ℓ,
     — soit la suite tend vers $-\infty$ (et elle n'est pas minorée).
   - Théorème des suites adjacentes :
     Deux suites sont adjacentes quand l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence tend vers 0. Elles convergent alors vers la même limite.
   - Théorème de Bolzano-Weierstrass.
     De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

4. **Relations de comparaison**
   On considère deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
   - Relation de domination.
     On dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) quand la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée. Notation : $u_n = O(v_n)$.
   - Relation de négligeabilité. On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) quand la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers 0. Notation : $u_n = o(v_n)$.
   - Relation d'équivalence.
     On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) quand la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers 1. Notation : $u_n \sim v_n$.
   - Négligeabilités usuelles :

     pour $a > 0$, $\ln n = o(n^a)$
     pour $a < b$, $n^a = o(n^b)$

     pour $b > 1$, $n^a = o(b^n)$
     pour $0 < a < b$, $a^n = o(b^n)$

5. **Exemples**
   - Suite géométrique : $(a.q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+1} = qu_n$
   - Suite arithmétique : $(a + nr)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+1} = u_n + r$
   - Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$.
     Méthode d'étude à connaître : recherche d'une solution constante en résolvant $x = ax + b$, puis soustraction membre à membre dans $\begin{cases} u_{n+1} & = au_n + b \\ x & = ax + b \end{cases}$ pour se ramener à une suite géométrique.

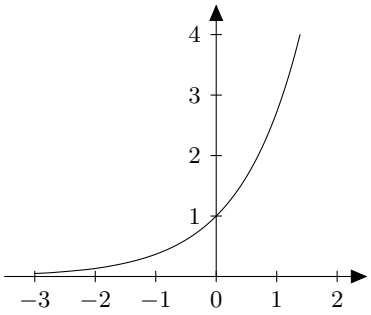
- Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$.
  - Si $u_n \to \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$ (théorème du point fixe).
  - Si I est un intervalle stable par f et que $u_0 \in I$, alors tous les u_n appartiennent à I.
  - Pour l'étude de la monotonie de (u_n), étude du signe de $u_{n+1} - u_n$, par étude du signe de $f(x) - x$, ou par récurrence, si f est croissante.

- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
  - L'ensemble des suites vérifiant cette relation est un espace vectoriel de dimension 2.
  - On recherche des suites particulières de la forme (r^n).
    . si l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors il existe (α, β) tel que $u_n = \alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n$.
    . si l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$ possède une racine double r, alors il existe (α, β) tel que $u_n = (\alpha n + \beta) r^n$.

A.4 Fonctions usuelles

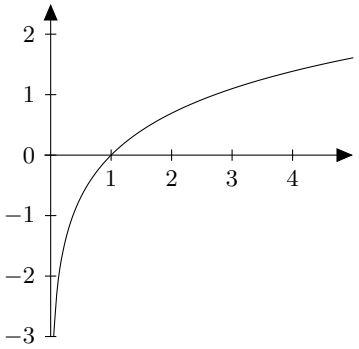
1. **Exponentielle**

   - $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
   - $\exp' = \exp$
   - exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
     la bijection réciproque est le logarithme.



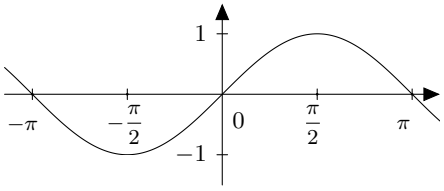
2. **Logarithme**

   Pour $x > 0$, $y > 0$, $a \neq 0$,
   - $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
   - $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
   - $\ln(a^n) = n \ln|a|$
   - $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
   - ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

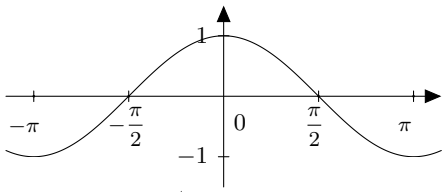


3. **Puissances**
   - Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{C}$, on définit $a^b = \exp(b \ln a)$.
   - $(ab)^c = a^c b^c$, $(a^b)^c = a^{bc}$, $a^{b+c} = a^b a^c$

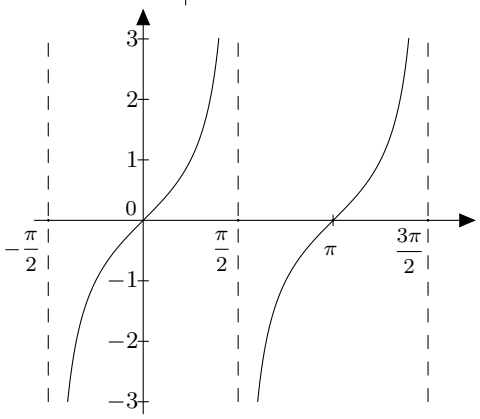
4. **Fonctions circulaires**
   - sin est défini sur $\mathbb{R}$
   - $(\sin x)' = \cos x$
   - sin est bijectif de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$,
     la bijection réciproque est arcsin.



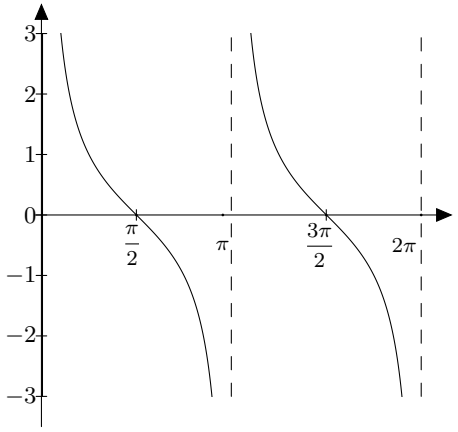
- cos est défini sur $\mathbb{R}$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- cos est bijectif de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, la bijection réciproque est arccos.



- tan est défini sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- tan est bijectif de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, la bijection réciproque est arctan.



- cotan est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- $(\operatorname{cotan} x)' = -1 - \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
- cotan est bijectif de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$



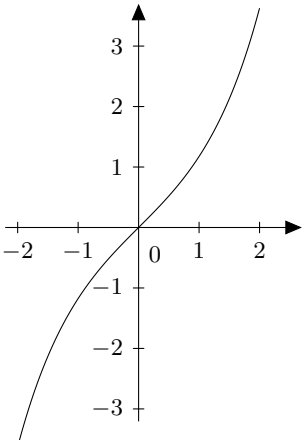
5. **Inégalités classiques, à savoir redémontrer**

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x| \qquad \exp(x) \geqslant 1 + x$$

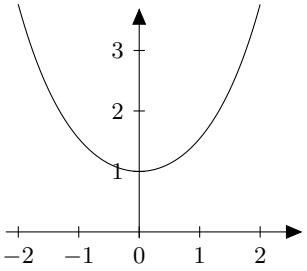
$$\text{Pour } x > -1, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$$

6. **Fonctions hyperboliques**

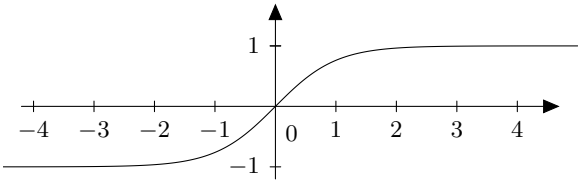
- sh est défini sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$



- ch est défini sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

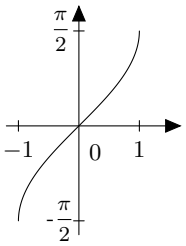


- th est défini sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
- $(\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

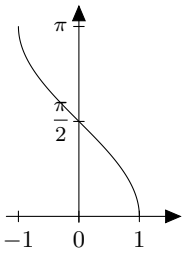


7. **Fonctions circulaires réciproques**

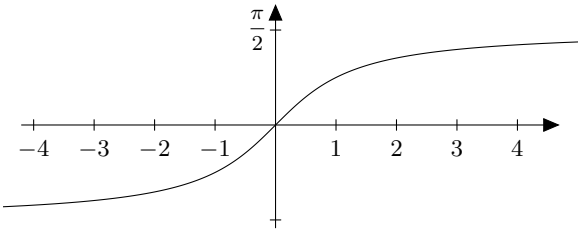
- arcsin est définie sur $[-1, 1]$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $y = \sin(x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad (x = \arcsin(y) + 2k\pi)$ ou $(x = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi)$



- arccos est définie sur $[-1, 1]$
- $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $y = \cos(x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad (x = \arccos(y) + 2k\pi)$ ou $(x = -\arccos(y) + 2k\pi)$



- arctan est définie sur $\mathbb{R}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
- $y = \tan(x) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad (x = \arctan(y) + k\pi)$



8. **Égalités à savoir redémontrer**

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{pour } x > 0, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{pour } x < 0, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{-\pi}{2}$$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad$ $\sin(\arcsin x) = x$

$\cos(\arccos x) = x$ $\qquad$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

9. **Dérivées et primitives usuelles**

$\longrightarrow$ Dérivation $\longleftarrow$ Primitivation		
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	(u à valeurs dans $\mathbb{R}$)
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	(u et v à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$\dfrac{u(x)}{v^n(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-nu(x)v'(x)}{v^{n+1}(x)}$	(u et v à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$	(u à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$\exp(ax)$	$a\exp(ax)$	($a\in\mathbb{C}$)
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x$ ou $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
$x\ln\lvert x\rvert - x$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	x^α	

Savoir-faire en termes de primitives

— Avec le tableau précédent, savoir déterminer toutes les primitives usuelles : fonctions puissances, trigonométriques, hyperboliques, exponentielles, logarithmes,...

— Savoir primitiver $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$ à l'aide de l'exponentielle complexe.

— Savoir se ramener à arctan pour primitiver. $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ lorsque $b^2-4ac<0$.

— Savoir effectuer des décompositions en éléments simples pour accéder à des primitives. Proposons un exemple.

EXEMPLE On considère $F(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)^3(x^2+x+1)^2}$. Il existe a,b,c,d,e,f,g,h réels et Q polynôme tels que :

$$F(x) = Q(x) + \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{(x-\beta)^2} + \frac{d}{(x-\beta)^3} + \frac{ex+f}{x^2+x+1} + \frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}$$

(a) Q : quotient de la division euclidienne du numérateur de F par son dénominateur. C'est la partie entière de F.

(b) a : on multiplie F par $x-\alpha$ puis on évalue en $x=\alpha$.

(c) d : on multiplie F par $(x-\beta)^3$ puis on évalue en $x=\beta$.

(d) c : on retranche $\dfrac{d}{(x-\beta)^3}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par $x-\beta$, on multiplie par $(x-\beta)^2$ puis on évalue en $x=\beta$.

(e) b : on retranche $\dfrac{c}{(x-\beta)^2}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par $x-\beta$, on multiplie par $x-\beta$ puis on évalue en $x=\beta$.

(f) g, h : on multiplie F par $(x^2+x+1)^2$ puis on évalue en $x=j$ (racine de x^2+x+1). On trouve $gj+h$, d'où g et h.

(g) e, f : on retranche $\dfrac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par x^2+x+1, on multiplie par x^2+x+1 puis on pose $x=j$. On trouve $ej+f$, d'où e et f.

D'autres relations peuvent aussi être utilisées, par exemple :

— On multiplie par x^k puis on fait tendre x vers $+\infty$.

— On prend des valeurs particulières de x.

— Utiliser des arguments de parité.

10. **Limites usuelles, équivalents usuels**

Pour $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Pour $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha \ln x = 0$

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^x = +\infty$

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

$\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$

$\tan x \underset{x\to0}{\sim} x$

$\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$

$\arctan x \underset{x\to0}{\sim} x$

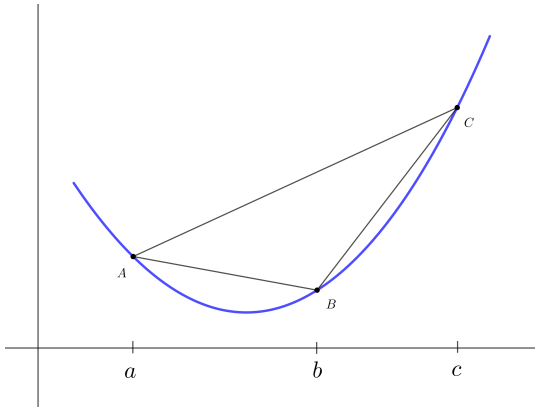
La formule de Taylor-Young peut aussi souvent aider à trouver un équivalent de $f(x)$ quand $x\to0$.

A.5 Propriétés des fonctions réelles d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Théorème des valeurs intermédiaires
   - Si f est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et si m est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe c compris entre a et b et tel que $f(c)=m$.
   - L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
2. Image d'un segment par une fonction continue
   - Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
   - L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
3. Dérivation d'une fonction composée .
$$(g\circ f)'=f'\times(g'\circ f)$$
4. Théorème de Rolle et des accroissements finis
   - Théorème de Rolle : si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. et si $f(a)=f(b)$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
   - Théorème des accroissements finis : si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
5. Inégalité des accroissements finis :
   - si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.
6. Théorème de la bijection
   - Une fonction continue sur un intervalle et injective, est strictement monotone.
   - Toute fonction réelle strictement monotone et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.
   - Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre $[a,b]$ et le segment $[f(a),f(b)]$. Il faut savoir adapter à $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ où $a,b\in\overline{R}$, et au cas où f décroît.
7. Théorème de la limite de la dérivée.
   - Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et que
   $$\lim_{x\to a} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$$
   Alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$.
   On remarque que f' est continue en a.
   - On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et que $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\pm\infty$. Alors
   $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$$
   Autrement dit, le graphe de f admet une demi-tangente verticale en a, et la fonction f n'est pas dérivable en a.

8. Théorème de dérivation d'une fonction réciproque.
   Soit f une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle J et $y_0 \in J$. Si f est dérivable en $a = f^{-1}(y_0)$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(a) \neq 0$. De plus, si tel est le cas
   $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0)}$$

9. Convexité.
   - f est *convexe* sur I si $\forall (a,b) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$,
     $$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$
     f est *concave* sur I si $-f$ est convexe sur I. Un *point d'inflexion* de f est un point en lequel f change de convexité.
   - f est convexe si, et seulement si, la courbe représentative de f est en-dessous de ses cordes.
   - Inégalité de Jensen
     Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^*$.
     Pour tout $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ et tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, on a :
     $$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$
     soit encore $f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$
   - Inégalité des pentes
     f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $\mathcal{T}_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ (« les pentes vont croissant »).
     Si f est convexe sur I, on a *l'inégalité des pentes*. Pour a, b, c dans I tels que $a < b < c$, on a
     $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
     

     Pente de $[AB]$ $\leqslant$ Pente de $[AC]$ $\leqslant$ Pente de $[BC]$
   - Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
     $$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I &\Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I \\ &\Leftrightarrow C_f \text{ est au-dessus de ses tangentes sur } I \end{aligned}$$
   - Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.
     f est convexe sur I si, et seulement si, $f'' \geqslant 0$ sur I.

Annexe B

Développements

Voici la liste des développements en série entière à connaître par cœur.

$\mathrm{R} = +\infty$	$z \in \mathbb{C}$	$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
$\mathrm{R} = 1$	$z \in D(0,1)$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$
$\mathrm{R} = +\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$\mathrm{R} = +\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$\mathrm{R} = +\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$
$\mathrm{R} = +\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$\mathrm{R} = 1$	$x \in]-1, 1]$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$
$\mathrm{R} = 1$	$x \in]-1, 1]$	$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$
$\mathrm{R} = 1$ si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	$x \in]-1, 1[$	$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n$

Voici la liste des développements limités **au voisinage de 0** à connaître par cœur.

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$(\alpha \in \mathbb{R}),\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$
$\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + ... + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

Formule de Taylor-Young : Soient f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$. On a, pour $x \in I$,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Annexe C

Structures usuelles

Applications

Soit f une application définie sur un ensemble A et à valeurs dans un ensemble B.

- f est injective quand $\forall (x,y) \in A^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- f est surjective quand $\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad y = f(x)$
- f est bijective quand elle est injective et surjective.
- d'une partie C de B : $f^{-1}(C) = \{x \in A, |\ f(x) \in C\}$. On a $x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x) \in C$.
- Si f est définie sur $\mathbb{R}^n$, on appelle $i$ème application partielle de f en $(a_1, \cdots, a_n)$, l'application $t \mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \cdots, a_n)$.
- Si f est à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie et de base $e = (e_1, \cdots, e_n)$, on appelle *applications coordonnées* de f les applications $f_1, \ldots, f_n$ telles que pour tout x, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$.
- Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E : fonction notée $\mathbb{1}_A$ définie de E dans $\{0,1\}$ par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Relations binaires

Soit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E.

- La relation $\mathcal{R}$ est reflexive quand $\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x$.
- La relation $\mathcal{R}$ est symétrique quand $\forall (x,y) \in E^2 \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.
- La relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique quand $\forall (x,y) \in E^2 \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$.
- La relation $\mathcal{R}$ est transitive quand $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$.
- La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre quand elle est reflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence quand elle est reflexive, symétrique et transitive.
  Pour $x \in E$, la classe d'équivalence de x est $\overline{x} = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}$
  Les classes d'équivalence forment une partition de E.

Loi de composition interne

- Une loi de composition interne $*$ sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E.
- $*$ est commutative quand $\forall (a,b) \in E^2 \quad a * b = b * a$

- $*$ est associative quand $\forall (a,b,c) \in E^3 \quad (a*b)*c = a*(b*c)$
- $e \in E$ est élément neutre de la loi $*$ quand $\forall a \in E \quad a*e = e*a = a$
- $x \in E$ possède un symétrique $y \in E$ quand $x*y = y*x = e$
- $*$ est distributive par rapport à $+$ quand
  $\forall (a,b,c) \in E^3 \quad a*(b+c) = a*b + a*c$ et $(a+b)*c = a*c + b*c$

Groupe

1. Groupe
   $(G,*)$ est un groupe quand G est un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur G, associative, possédant un élément neutre et telle que tout élément de G possède un symétrique. Si de plus $*$ est commutative, on dit que le groupe est commutatif ou abélien.
2. Sous-groupe
   H est un sous-groupe de $(G,*)$ quand H est une partie non vide de G, stable par composition et par inversion :
   - $H \subset G$
   - $H \neq \emptyset$
   - $\forall (x,y) \in H^2 \quad x*y \in H$
   - $\forall x \in H \quad x^{-1} \in H$
3. Morphisme de groupes
   φ est un morphisme du groupe $(G,*)$ dans le groupe $(H,\perp)$ quand φ est une application de G dans H qui conserve la loi du groupe :
   $$\forall (x,y) \in G^2 \quad \varphi(x*y) = \varphi(x) \perp \varphi(y)$$

Anneau

1. Anneau
   $(A,+,\times)$ est un anneau quand
   - $(A,+)$ est un groupe commutatif
   - $\times$ loi de composition interne sur A
   - $\times$ associative
   - $\times$ possède un élément neutre
   - $+$ est distributive par rapport à $\times$

   L'élément neutre pour la loi $+$ est noté 0_A et l'élément neutre pour la loi $\times$ est noté 1_A.
   Si de plus $\times$ est commutative, on dit que l'anneau est commutatif.
2. Sous-anneau
   B est un sous-anneau de $(A,+,\times)$ quand B est un sous-groupe de $(A,+)$ stable par produit et contenant l'élément unité de A :
   - $B \subset A$
   - $\forall (x,y) \in B^2 \quad x-y \in B$
   - $\forall (x,y) \in B^2 \quad x \times y \in B$
   - $1_A \in B$
3. Idéal d'un anneau commutatif
   I est un idéal d'un anneau commutatif $(A,+,\times)$ quand I est un sous- groupe de $(A,+)$ et que I est absorbant :

- $(I,+)$ sous-groupe de A
- $\forall x \in I \quad \forall a \in A \quad a \times x \in I$

4. Morphisme d'anneau
   φ est un morphisme de l'anneau $(A,+,\times)$ dans l'anneau $(B,+,\times)$ quand φ est une application de A dans B qui conserve les lois de l'anneau et l'élément unité :
   - $\forall (x,y) \in A^2 \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
   - $\forall (x,y) \in A^2 \quad \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$
   - $\varphi(1_A) = 1_B$

Corps

1. Corps
   $(K,+,\times)$ est un corps quand c'est un anneau commutatif, différent de $\{0\}$ dans lequel tout élément différent de 0_K possède un symétrique pour la loi $\times$.
2. Sous-corps
   ℓ est un sous-corps de $(K,+,\times)$ quand c'est un sous-anneau et que tout élément non nul de ℓ est inversible dans ℓ.

Espace vectoriel

1. Espace vectoriel
   $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur le corps $(K,+,\times)$ quand $(E,+)$ est un groupe commutatif et . est une application de $K \times E$ dans E (loi externe) vérifiant les propriétés
   - $\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in K \quad \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
   - $\forall x \in E \quad \forall (\lambda,\mu) \in K^2 \quad (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
   - $\forall x \in E \quad \forall (\lambda,\mu) \in K^2 \quad (\lambda \times \mu).x = \lambda.(\mu.x)$
   - $\forall x \in E \quad 1_K.x = x$

   Les éléments de E sont appelés vecteurs . Les éléments de K sont appelés scalaires.
2. Sous-espace vectoriel
   F est un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel $(E,+,.)$ quand F est une partie non vide de E stable par combinaison linéaire.
   - $F \subset E$
   - $F \neq \emptyset$
   - $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in K \quad \lambda x + y \in F$
3. Sous-espace affine
   $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine du K-espace vectoriel $(E,+,.)$ quand il existe un sous-espace vectoriel F et un vecteur a tels que $\mathscr{F} = a + F = \{a + x, \quad x \in F\}$.
4. Application linéaire
   ϕ est une application linéaire du $K-$espace vectoriel E dans le $K-$espace vectoriel F quand ϕ est une application de E dans F qui conserve les lois + et . :
   - $\forall (x,y) \in E^2, \quad \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$
   - $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in K \quad \phi(\lambda.x) = \lambda.\phi(x)$

Algèbre

1. Algèbre
   $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ est une algèbre sur le corps K quand
   — $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau,
   — $(\mathcal{A}, +, .)$ est un espace vectoriel sur K
   — $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2 \quad \forall \lambda \in K \quad \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$
2. Sous-algèbre
   B est une sous-algèbre de la K-algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ quand B est un sous-anneau de $(\mathcal{A}, +, \times)$ et un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, .)$.
3. Morphisme d'algèbre
   φ est un morphisme de l'algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ dans l'algèbre $(\mathcal{B}, +, \times, .)$ quand φ est un morphisme d'anneau de $(\mathcal{A}, +, \times)$ dans $(\mathcal{B}, +, \times)$ et une application linéaire de $(\mathcal{A}, +, .)$ dans $(\mathcal{B}, +, .)$.

Morphisme

- Isomorphisme : morphisme bijectif.
- Endomorphisme : morphisme d'un ensemble vers lui-même.
- Automorphisme : endomorphisme bijectif.

morphisme de groupe	$\varphi(x * y) = \varphi(x) \perp \varphi(y)$
morphisme d'anneau	$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y) \quad \varphi(1) = 1$
morphisme de corps	$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y) \quad \varphi(1) = 1$
morphisme d'espace vectoriel = application linéaire	$\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$
morphisme d'algèbre	$\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y) \quad \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y) \quad \varphi(1) = 1$

Un peu d'arithmétique

- Un entier naturel p est premier si $p \geqslant 2$ et les seuls diviseurs entiers naturels de p sont 1 et p.
- Théorème de Bézout. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + vb = 1$.
- Lemme de Gauss. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(a|bc \quad \text{et} \quad a \wedge b = 1) \quad \Rightarrow \quad a|c$$

- Lemme d'Euclide. Un nombre premier divise un produit si et seulement s'il divise un de ses facteurs.
- Petit théorème de Fermat. Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. On a

$$a^p \equiv a \quad [p]$$

Si de plus a n'est pas un multiple de p, alors

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$$

Annexe D

Mémento d'algèbre linéaire de première année

D.1 Espaces vectoriels

D.1.1 cas général

- Soit F un sous-ensemble de E. Lorsque $(F, +, .)$ est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit que F est un sous-espace vectoriel de E.

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ F \text{ est stable par combinaison linéaire :} \\ \forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.x + y \in F \end{cases}$$

- Pour F et G sous-espaces vectoriels de E, $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

- Soient x_1,x_2,...x_p des vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$:

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p,\ (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, x_2, ..., x_p)$ et noté $\text{Vect}\,(x_1, x_2, ..., x_p)$.
Plus généralement,

$$\text{Vect}\,((u_i)_{i\in I}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \ \mid\ (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle} \right\}$$

$\text{Vect}\,((u_i)_{i\in I})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les u_i.

D.1.2 en dimension finie

- L'espace vectoriel E est de dimension finie lorsque E admet une base. Dans ce cas, toutes les bases de E ont même nombre n de vecteurs. Ce nombre n est la dimension de E.

$$\dim E = n \Leftrightarrow \text{ il existe une base de } E \text{ ayant } n \text{ éléments}$$

$$\dim E = 0 \Leftrightarrow E = \{0\}$$

- Dimensions de référence

$$\dim \mathbb{K}^n = n \qquad \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1 \qquad \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$$

Pour E et F de dimension finie,

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F \qquad \dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

$\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ n'est pas de dimension finie. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
- Pour F et G sous-espaces vectoriels de E, on a : $F = G \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases}$
- Pour E de dimension finie n et H sous-espace vectoriel de E.

$$\begin{aligned} H \text{ est un hyperplan de } E &\Leftrightarrow H \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle} \\ &\Leftrightarrow \dim H = n-1 \\ &\Leftrightarrow H \text{ est supplémentaire d'une droite de } E \end{aligned}$$

- Toutes les équations d'un hyperplan sont « multiples » les unes des autres : si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles dont H est le noyau, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.
- Intersections d'hyperplans
Soit E de dimension finie n et $t \in [\![1,n]\!]$.
L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de dimension **au moins** $n-r$.
Tout sous-espace vectoriel de dimension $n-r$ est l'intersection de r hyperplans.

D.2 Matrices

- Base canonique : En notant $E_{i,j}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf le terme en i^{e} ligne, j^{e} colonne qui vaut 1, on a : $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell} \qquad \text{où } \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Coefficients d'un produit.
Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, AB est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de coefficients

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

- Pour A et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ (A et B commutent), on a la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

- La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

D.2.1 inversibilité

•

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{telle que } AB = I \text{ ou } BA = I \\ &\quad \text{l'autre égalité est alors vérifiée ; on note } B = A^{-1} \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \text{ le système écrit matriciellement } AX = Y \\ &\quad \text{est de Cramer ; on a dans ce cas } X = A^{-1}Y \end{aligned}$$

- Si A est triangulaire ou diagonale, A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
  L'inverse de $\text{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est dans ce cas $\text{diag}(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n})$.

  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :
  AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$
  $A^\top$ est inversible d'inverse $(A^{-1})^\top$
  $\forall p \in \mathbb{Z}$, A^p est inversible d'inverse $(A^{-1})^p$, notée A^{-p}.

D.2.2 rang

- On appelle matrice extraite de A une matrice B obtenue en supprimant certaines lignes et/ou colonnes de A. On a alors $\text{rg}(B) \leqslant \text{rg}(A)$.
  $\text{rg}(A)$ est la taille maximale des matrices inversibles qu'on peut extraire de A.

- Le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes :
  $\text{rang}(A) = \dim \text{Vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_p)$.
  Le rang de A est aussi le rang de ses vecteurs lignes (une matrice et sa transposée ont même rang).
  Les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes de A (méthode du pivot de Gauss) transforment A en des matrices de même rang que A.

- Matrices équivalentes
  Soient A et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  A et B sont équivalentes s'il existe $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $G \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.
  Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes.

  Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang. En notant r leur rang commun, elles sont équivalentes à $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Matrices semblables
  Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  A et B sont semblables s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.
  Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Elles ont donc même rang, même trace, même déterminant.

D.3 Familles de vecteurs

D.3.1 familles génératrices

- $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, famille de vecteurs de E, est une famille génératrice de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, ...u_p :

$$\forall v \in E,\ \exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tels que } v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$$

- Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.
- Théorème de la base extraite
  Si E est de dimension finie n :
  - de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E ;
  - toute famille génératrice a au moins n éléments ;
  - toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.

D.3.2 familles libres

- $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, famille de vecteurs de E, est une famille libre de E si pour λ_1, λ_2,...λ_p scalaires :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, 2, ..., p\},\ \lambda_i = 0$$

  Une famille infinie de vecteurs est libre si toute sous-famille finie est libre.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une famille réduite à un seul vecteur, (x), est libre si et seulement si $x \neq 0$.

- Toute famille de polynômes **non nuls** de degrés deux à deux distincts est une famille libre.

- Théorème de la base incomplète
  Si E est de dimension finie n :
  - toute famille libre peut être complétée en une base ;
  - toute famille libre de E a au plus n éléments ;
  - toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.

D.3.3 familles liées

- $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, famille de vecteurs de E, est une famille liée de E s'il existe λ_1, λ_2,...λ_p scalaires non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$.
  Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs.
  Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

- $$(u, v) \text{ est liée } \Rightarrow (u = 0 \text{ ou il existe } \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } v = \lambda u)$$

D.3.4 bases

- Une base de E est une famille libre et génératrice de E.
  $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont dans E et tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

- Apport de la dimension finie. Si E est de dimension n :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \text{ est une base de } E &\Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est une famille libre de } E \text{ et a } n \text{ vecteurs} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est une famille génératrice de } E \text{ et a } n \text{ vecteurs} \end{aligned}$$

- Si E est de dimension n et $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs de E :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) &\leqslant n \text{ et } \operatorname{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leqslant p \\ \operatorname{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = p &\Leftrightarrow (u_1, u_2, \dots, u_p) \text{ est une famille libre} \\ \operatorname{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = n &\Leftrightarrow (u_1, u_2, \dots, u_p) \text{ est une famille génératrice de } E \end{aligned}$$

D.4 Applications linéaires

f est une application linéaire de E dans F si f est une application de E dans F satisfaisant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Une *forme linéaire* de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans E.
Un *isomorphisme* de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.
Un *automorphisme* de E est une application linéaire bijective de E dans E.

D.4.1 noyau et image

- Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
  $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
  $\operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\Leftrightarrow \ker f = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \ker f \subset \{0\} \\ f \text{ est surjective} &\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \\ &\Leftrightarrow F \subset \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

- Apport de la dimension finie
  Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

- Théorème du rang
  - Pour E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a le théorème du rang :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

  - Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors $u_{|S}$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

D.4.2 isomorphismes

- $\mathrm{GL}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires bijectives de E dans F.
- Soit $f \in \mathrm{GL}(E,F)$ et $g \in \mathrm{GL}(F,G)$.
  f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
  $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G et $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.
- Valable pour des applications (non nécessairement linéaires)
  Pour f application de E dans F, s'il existe une application g de F dans E telle que $g\circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f\circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

- Soit E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

  f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ il existe une base de E dont l'image par f soit une base de F
  $\Leftrightarrow$ l'image par f de toute base de E est une base de F

- Apport de la dimension finie
  - Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ <u>avec $\dim E = \dim F$</u>. On a :

    $$f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

  - Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. On a :

    $$f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow \quad f \text{ est inversible à gauche} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est inversible à droite}$$
    $$\exists g \in \mathscr{L}(E),\ g\circ f = \mathrm{Id} \qquad\qquad \exists g \in \mathscr{L}(E),\ f\circ g = \mathrm{Id}$$

- - $\mathrm{rg}(v\circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$

  - Le rang est invariant par composition avec un isomorphisme : si f et g sont des isomorphismes,

    $$\mathrm{rg}(f\circ u) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u\circ g)$$

- Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, E admettant une base $\mathcal{B}$. On note A la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$. L'égalité $y = f(x)$ s'écrit matriciellement $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(y) = A\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

  f est bijective si et seulement si A est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{mat}(f^{-1}) = A^{-1}$.
  $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$ $\quad$ $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(A)$.

D.4.3 changement de bases

- En réfléchissant aux vecteurs, on retient, en comprenant :

  $$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(w\circ u) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(w) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

- Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ...e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ...f_n)$ deux bases de E. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, ...f_n)$ des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
  La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et on a $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.
  En présence de plusieurs bases, $\quad P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.

- Formule de changement de base – vecteur

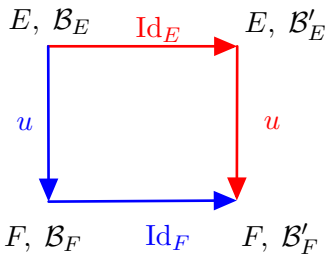
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x) \qquad \text{(venu de } x = \mathrm{Id}(x)\text{)}$$

- Formule de changement de base – endomorphisme
  Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}.\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)\ .P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

- Changement d'un couple de bases
  Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ bases de E, $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ bases de F.

$$\begin{array}{lcl} u \circ \mathrm{Id}_E & = & \mathrm{Id}_F \circ u \\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u)\ .\ P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E} & = & P_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}'_F}\ .\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \end{array}$$



$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = (P_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}'_F})^{-1}.\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\ .P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$$

D.5 Systèmes linéaires

Un système linéaire peut se mettre sous la forme $AX = B$ avec A matrice rectangulaire, X vecteur colonne des inconnues et B vecteur colonne second membre.

- Le système $AX = B$ est compatible (admet au moins une solution) si et seulement si $B \in \mathrm{Im}\, A$.
- Toute solution du système $AX = B$ est la somme $X_0 + X_1$ d'une solution particulière du système X_0 et de $X_1 \in \ker A$.
- Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ admet une unique solution.

D.6 Sommes directes

F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E.

- $F_1 + F_2$ est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.
  C'est un sous-espace vectoriel de E.
  On a $E = F_1 + F_2$ lorsque $\forall x \in E$, il existe $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
- On dit que la somme $F = F_1 + F_2$ est directe, et on note $F = F_1 \oplus F_2$, si

$$\forall x \in F,\ \text{il existe un unique couple } (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } x = x_1 + x_2$$

- On dit que F_1 et F_2 sont *supplémentaires* dans E lorsque $E = F_1 \oplus F_2$.
- On a :

$$F = F_1 \oplus F_2 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} F = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

- Formule de Grassman
  Pour F et G sous-espaces vectoriels de E, on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

- Caractérisation des supplémentaires en dimension finie
  Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\Leftrightarrow \text{ la concaténation de } \mathcal{B}_F \text{ et de } \mathcal{B}_G \text{ est une base de } E \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G & \dim E \\ F \cap G & = \{0\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G & \dim E \\ F + G & = E \end{cases} \end{aligned}$$

D.7 Projecteurs et symétries

- Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément $x \in E$ s'écrit d'une et une seule façon comme la somme $x = x_1 + x_2$ d'un élément $x_1 \in F_1$ et d'un élément $x_2 \in F_2$. Avec ces notations :
  — l'application de E dans E qui à x associe x_1 est appelée projection sur F_1 parallèlement à F_2 ou encore projecteur sur F_1 de direction F_2,
  — l'application de E dans E qui à x associe $x_1 - x_2$ est appelée symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 ou encore symétrie par rapport à F_1 de direction F_2.

- On remarque que $s = 2p - \mathrm{Id}$.
- Caractérisation des projecteurs et symétries
  - p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et $p^2 = p$. Dans ce cas, $\mathrm{Im}\, p$ et $\ker p$ sont supplémentaires dans E et p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$.
    Pour tout $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker p}$.
  - s est une symétrie si et seulement si s est linéaire et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, $\ker(s - \mathrm{Id})$ et $\ker(s + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id})$.

Annexe E

Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée *exponentielle de la matrice* A et est notée $\exp(A)$ ou e^A : $\quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. Il s'agit d'une matrice.

- Cas de matrices semblables
  Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et A et B matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $A = PBP^{-1}$. Alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables et
  $$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$$

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable, $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

- Pour u endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée *exponentielle de* u et est notée e^u ou $\exp(u)$. Il s'agit d'un endomorphisme de E.
  $$e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$$

- Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La matrice de $\exp(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\exp(A)$.

- L'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $u \mapsto e^u$ est continue sur $\mathscr{L}(E)$.

- Pour A et B matrices qui commutent, et a et b endomorphismes qui commutent, on a :
  $$e^{A+B} = e^A e^B \quad \text{et} \quad e^{a+b} = e^a e^b$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : t \mapsto e^{tA}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = Ae^{tA}$.

Annexe F

Introduction à LaTeX

F.1 Introduction

Pour utiliser LaTeX, on crée à l'aide d'un éditeur de texte un document de type `.tex` contenant du texte et des balises qui indiquent comment ce texte doit être affiché. Ensuite, LaTeXcompile ce document et crée un fichier `.pdf` ou `.dvi` que l'on peut visualiser ou imprimer.

F.1.1 Utiliser LaTeX

— Sans installation.
Se créer un compte (gratuit) sur `www.overleaf.com`. Je vous ai préparé une petite aide pour vos TIPE à l'adresse

`https://fr.overleaf.com/read/qvjpbdjrshfh#5cda20`

— Avec installation.
Installer Miktex et Texmaker (ou des logiciels équivalents). Ce sont des logiciels libres. Il faut installer les deux : Texmaker est un éditeur de texte adapté à LaTeXet Miktex est une version du programme LaTeX. L'installation et la prise en main de ces logiciels peuvent prendre un peu de temps.

F.1.2 Structure d'un document .tex

```
\documentclass{article}

\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[french]{babel}
\usepackage{amsmath, mathtools,amsfonts,amssymb}

\begin{document}
.......................
Tout ce que je veux afficher dans mon document
.......................
\end{document}
```

F.1.3 Titres, sous-titres, numérotation

```
\section \subsection \subsubsection
```

Exemple :

```
\section{Introduction}
.........
\subsection{Utiliser LaTeX}
.........
\subsection{Structure d'un document .tex}
.........
```

La numérotation est automatique.
Il est possible de l'enlever en rajoutant * : `\section*{Introduction}`
Les sauts de lignes et les espacements sont également automatiques.

F.1.4 Les environnements

Les environnements sont définis par des balises et permettent de structurer un document.
Un environnement commence par `\begin{...}` et finit par `\end{...}`

Listes numérotées :

```
\begin{enumerate}
\item liste
\item tableau
\item figure
\end{enumerate}
```

1. liste
2. tableau
3. figure

Listes non numérotées :

```
\begin{itemize}
\item liste
\item tableau
\item figure
\end{itemize}
```

- liste
- tableau
- figure

Description :

```
\begin{description}
\item[Premier conseil : ]
Apprendre son cours chaque jour.
\item[Deuxième conseil : ]
Réviser tout le chapitre chaque fin de semaine.
\end{description}
```

Premier conseil : Apprendre son cours chaque jour.

Deuxième conseil : Réviser tout le chapitre chaque fin de semaine.

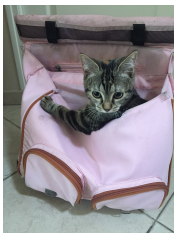
Tableaux : `&` sépare les éléments d'une ligne, `\\` marque la fin d'une ligne.

```
$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
a&b&c\\
\hline
d&e&f
\hline
\end{array}$
```

a	b	c
d	e	f

Figures : (le fichier `chat.jpg` se trouve dans le même répertoire que votre fichier `.tex`)

```
\usepackage{graphicx}
\includegraphics[width=3cm]{chat.jpg}
```



F.2 Les mathématiques

F.2.1 L'environnement mathématique

- Pour insérer une formule mathématique dans une ligne de texte : `$...$`
- Pour une formule isolée et centrée sur une ligne : `$$...$$`
- `\begin{equation}...\end{equation}` produit le même résultat mais numérote automatiquement les formules

F.2.2 Notations mathématiques

Indices : `$x_2$` donne x_2 ; `$\lim\limits_{x\rightarrow 0}$` donne $\lim\limits_{x\to 0}$; `$\int_I$` donne $\int_I$.

Exposants : `$x^2$` donne x^2 ; `$\sum\limits_{n=0}^{10}$` donne $\sum\limits_{n=0}^{10}$; `$\int_0^1$` donne $\int_0^1$.

Fonctions usuelles : Les fonctions usuelles doivent être composées en caractères droits et non italiques. Elles ont donc des commandes dédiées : `\cos`, `\sin`, `\tan`, `\exp`, `\ln`, `\log`, etc.
`$\ln x$` donne : $\ln x$; `$\cos^2x+ \sin^2x=1$` donne : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Lettres grecques : `$\alpha \beta \gamma \delta\dots$` donne $\alpha\beta\gamma\delta\dots$

Fractions : `\frac` qui prend deux arguments (le numérateur puis le dénominateur) ou `\dfrac`.
`$\dfrac {a}{b}$` donne $\dfrac{a}{b}$;

Racines : `\sqrt` prend en argument ce qui va être sous la racine.

`$\sqrt{\dfrac{1 + \frac{2}{3}}{4 + \frac{5}{6}}}$` donne $\sqrt{\dfrac{1+\frac{2}{3}}{4+\frac{5}{6}}}$.

Intégrales : `\int` prend en indice et en exposant les deux bornes d'intégrations.

`$\int\limits_0^1 f(t)\, dt$` donne $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ (`\,` est un petit espace)

`$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}^1 f(t)\, \mathrm{d}t$` donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$

Flèches : `$\rightarrow \longrightarrow \mapsto \Rightarrow \Leftrightarrow ... $` donne $\rightarrow \longrightarrow \mapsto \Rightarrow \Leftrightarrow$ ...

Matrices : `&` sépare les éléments d'une ligne, `\\` marque la fin d'une ligne.

`$\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}$` donne $\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}$

`$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$` donne $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

`$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$` donne $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

Adapter la taille des parenthèses, accolades ... :

`$(\dfrac{A}{B})$` donne $(\dfrac{A}{B})$

`$\left(\dfrac{A}{B}\right)$` donne $\left(\dfrac{A}{B}\right)$

`$\left\{\begin{matrix} ax+by=c\\dx+ey=f\end{matrix}\right.$`

donne $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$

Symboles divers :

- multiplication `\times` ou `\dot` : $\times$ ou $\cdot$
- intersection `\cap` : $\cap$
- union `\cup` : $\cup$
- somme directe `\oplus` : $\oplus$
- inférieur, inférieur ou égal `<`, `\leqslant` : $<$, $\leqslant$
- supérieur, supérieur ou égal `>`, `\geqslant` : $>$, $\geqslant$
- inclus `\subset` : $\subset$
- appartient `\in` : $\in$
- différent `\neq` : $\neq$

Quelques exemples de formules

- `$\dfrac {\cos x}{\sin x}$` donne : $\dfrac{\cos x}{\sin x}$
- `$ \sum\limits_{k=1}^n\frac 1k$` donne : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

— `$ \int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt {\pi}}{2}$` donne : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

— `$ \lim\limits _{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$` donne : $\lim\limits_{x\rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

F.3 Autres commandes

F.3.1 Taille des caractères

Du plus petit au plus grand : tiny, scriptsize , footnotesize, small, normalsize, large, Large, LARGE, huge, Huge.
Utilisation :
`\tiny variation \Large de la \normalsize taille d'un texte`
variation de la taille d'un texte

F.3.2 Style de caractères

`\textbf{gras}, \textit{italique}, \underline{souligné}, \texttt{texte}.`
gras, *italique*, souligné, `texte`.

F.3.3 Notes de bas de page

`Insérer une note de base de page\footnote{note en bas de page}.`

Insérer une note de base de page [1].

F.3.4 Mise en page

— L'essentiel de la mise en page est fait par LaTeX. Par défaut le texte est justifié. Inutile de mettre plusieurs espaces entre deux mots, ils ne seront pas pris en compte.

— Un seul retour à la ligne dans le fichier source est pris en compte par LaTeX comme un espace.

— Deux retours à la lignes marquent un nouveau paragraphe.

— `\\` force le changement de ligne.

— Pour sauter des lignes : `smallskip` (petit espace) , `medskip` (espace moyen) ou `bigskip` (grand espace).

— Pour ne pas avoir d'indentation au début des paragraphes :
`\parindent=0pt` avant `\begin{document}`

— `\newpage` force le changement de page.

F.3.5 Caractères spéciaux

œ : `n\oe ud` donne nœud.
ç : `fran\c{c}ais` donne français.
Accents : `\'e\`e\`a\`u\^e\^i\^o\'E\^E` donne éèàùêîôÉÊ.
On peut aussi taper directement les caractères accentués, mais il se peut que le texte soit moins compatible avec d'autres systèmes.

1. note en bas de page

F.4 Diaporama

Il y a tellement de choix de thèmes qu'il ne faut pas hésiter à chercher sur internet les options possibles de `Beamer` pour trouver son bonheur.

```
\documentclass{beamer}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[french]{babel}

\usetheme{Berlin}
%\usetheme{Varsaw}
%\usecolortheme{dolphin}
\usecolortheme{beetle}
\begin{document}

\begin{frame}{Titre de la première diapo (facultatif)}
texte de la première diapo
\begin{block}{Titre du premier bloc }
Blablablablabla
\end{block}
\begin{block}{Titre du second bloc}
Et encore et encore
\end{block}

\end{frame}

\begin{frame}
texte de la deuxième diapo
\end{frame}
```

F.5 Pour aller plus loin

Pour ma part, je travaille actuellement à partir de l'excellent livre

LaTeX, Apprentissage, guide et référence, Bernard Desgraupes

et bien sûr, avec l'aide d'internet

- https ://tex.stackexchange.com/ pour toute question
- http ://math.et.info.free.fr/TikZ/bdd/TikZ-Impatient.pdf pour tout ce qui est tableaux de variations, schémas
- ...

Annexe G

Conseils aux candidats

Voici quelques remarques pour les futurs candidats extraits de récents rapports de concours

- Dans toutes les épreuves, la notation tiendra compte non seulement de la capacité des candidats à s'exprimer dans un français correct, mais aussi du soin apporté à la présentation de la copie et à l'écriture ainsi que de la rigueur de la démarche intellectuelle.
- Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet, vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
- Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
- Il est très important d'écrire lisiblement, les copies peu lisibles ou relevant du brouillon sont systématiquement sanctionnées.
- On conseille fortement aux futurs candidats de mettre en évidence les résultats : souligner ou encadrer les résultats rend la copie bien plus agréable.
- C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
- Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
- Éviter d'essayer de tromper les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose le correcteur.
- Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes (les candidats passent par six ou sept étapes intermédiaires là où deux devraient suffire).
- Penser à réutiliser un résultat déjà établi.
- Citer tous les théorèmes utilisés.
- Rappeler toutes les hypothèses utiles lors de l'utilisation d'un théorème mêmes si elles figurent quatre lignes plus haut ou à la question précédente.
- Soigner les majorations.
- L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours. Sont ainsi valorisés :
  - l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
  - les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
  - l'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice (quand elle est autorisée !) ;
  - le soin apporté à la présentation de son travail.

— À propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours, ainsi que les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de court-circuiter la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte. Cela est d'autant plus vrai qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.

— Il est recommandé fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié. En revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et ne peut être que très pénalisante.

Connaître les lettres grecques d'usage scientifique est indispensable à l'oral.

Nom	minuscule	majuscule
alpha	α	
bêta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	
zêta	ζ	
êta	η	
thêta	θ	Θ
iota	ι	
kappa	κ	

Nom	minuscule	majuscule
lambda	λ	
mu	μ	
nu	ν	
pi	π	Π
rhô	ρ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
phi	ϕ ou φ	Φ
chi (prononcer khi)	χ	
psi	ψ	Ψ
oméga	ω	Ω

Index