# Exponentielle d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

## 1 Exponentielle de matrice

### 1.1 norme sous-multiplicative

Exercice 1 : Montrer que $\|.\|$ donnée par $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (on pourra admettre le fait que c'est une norme). Quelle autre norme sous-multiplicative connaissez-vous dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ?

Dans toute la suite, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative.

**Définition - propriété 1**

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée *exponentielle de la matrice* $A$ et est notée $\exp(A)$ ou $e^A$ : $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$. Il s'agit d'une matrice.

$\exp(I_n) =$

$\exp(0_n) =$

### 1.2 exponentielle et réduction

**Propriété 1**

Pour $D$ matrice diagonale, égale à $\begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$, on a $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_n} \end{pmatrix}$.

**Propriété 2 – cas de matrices semblables**

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A$ et $B$ matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $A = PBP^{-1}$. Alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables et

$$\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$$

**Méthode – cas d'une matrice diagonalisable**

Si $A$ est diagonalisable, pour calculer $\exp(A)$, on peut diagonaliser $A$ : $A = PDP^{-1}$ et utiliser

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner $\mathrm{Sp}(A)$ dans le cas où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Diagonaliser $A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En déduire $e^A$ et son spectre.

**Propriété 3**

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable, $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A$ est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

## 2 Exponentielle d'un endomorphisme

**Définition - propriété 2**

Pour $u$ endomorphisme de $E$, la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée *exponentielle de $u$* et est notée $e^u$ ou $\exp(u)$. Il s'agit d'un endomorphisme de $E$.

$$e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$$

**Propriété 4**

Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La matrice de $\exp(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\exp(A)$.

## 3 Continuité de l'exponentielle

**Propriété 5**

- L'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'application $u \mapsto e^u$ est continue sur $\mathscr{L}(E)$.

## 4 Dérivabilité de $t \mapsto e^{tA}$

Nous avons déjà vu que pour $A$ matrice carrée fixée, $f : t \mapsto e^{tA}$ était dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = e^{tA}A = Ae^{tA}$$

## 5 À suivre...

Il nous restera à montrer que pour $A$ et $B$ matrices qui commutent, et $a$ et $b$ endomorphismes qui commutent, on a :

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad \text{et} \quad e^{a+b} = e^a e^b$$

# 6 Annexe : quelques éléments de démonstrations

### Définition-propriété 1

On a $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}$. Il faut éventuellement réexpliquer $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ pour notre norme sous-multiplicative.

### Propriété 1

$\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{d_1^k}{k!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{d_1^k}{k!} \end{pmatrix}$ et il n'y a plus qu'à faire tendre $m$ vers $+\infty$.

Remarque : limite d'une matrice a été rencontrée dans Espaces vectoriels normés.

### Propriété 2

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$ et donc $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} = P(\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{B^k}{k!})P^{-1}$. L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est une application linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, espace de dimension finie, donc est continue. On obtient donc en faisant tendre $m$ vers l'infini : $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

### Propriété 3

Soit $A$ trigonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité. Il existe $P$ inversible et $T$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} &= P(\sum_{k=0}^{m} \frac{T^k}{k!})P^{-1} \\
&\quad \text{on a vu en algèbre que } T^k \text{ était triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux étaient les } \lambda_i^k \\
&= P \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé de dimension finie, donc $\mathcal{T}$ est fermé. Donc la limite des matrices $\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!} \end{pmatrix}$ (qui existe, c'est $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{T^k}{k!} = e^T$) est dans $\mathcal{T}$, autrement dit est triangulaire supérieure.

Par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$ (application linéaire en dimension finie), $e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (**) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ et on lit les valeurs propres sur la diagonale.

### Définition-propriété 2

Semblable à celle sur les matrices en prenant une norme subordonnée (par exemple, pour la sous-multiplicativité) dans $\mathscr{L}(E)$.

### Propriété 4

Pour tout $m$, $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!}) = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u))^k}{k!}$.

Le membre de droite tend vers $\exp(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u))$. Qu'en est-il du membre de gauche ?

On introduit $\psi : \begin{pmatrix} \mathscr{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{pmatrix}$. $\psi$ est une application linéaire en dimension finie donc $\psi$ est continue. Donc le membre de gauche tend vers $\text{mat}_{\mathcal{B}}(e^u)$.

### Propriété 5

Soit $r > 0$. Montrons que $\sum f_k$ converge normalement sur $B_f(0, r)$ où $f_k : A \mapsto \frac{A^k}{k!}$.

Pour $A \in B_f(0, r)$, $\|\frac{A^k}{k!}\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!} \leqslant \frac{r^k}{k!}$, donc

$$\|f_k\|_{\infty,\, B_f(0,r)} \leqslant \frac{r^k}{k!}$$

et il y a convergence normale, donc uniforme.
Les fonctions $f_k : A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ sont toutes continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Par le théorème de transmission de continuité, exp est continue sur $B_f(0, r)$. Ceci étant valable pour tout $r$, exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On peut rédiger de même la continuité de exp sur $\mathscr{L}(E)$.