

Équations différentielles scalaires

Révisions du cours de première année

Les attentes



1. Connaître le vocabulaire : équation différentielle, équation homogène associée, ordre.
2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 :
 - connaître l'ensemble des solutions de l'équation homogène,
 - avoir bien compris la décomposition d'une solution à l'aide d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène,
 - savoir trouver des solutions particulières par la méthode de la variation de la constante.
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :
 - connaître l'ensemble des solutions de l'équation homogène dans le cas complexe et dans le cas réel,
 - avoir bien compris la décomposition d'une solution à l'aide d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène,
 - savoir trouver des solutions particulières dans trois situations : second membre polynomial, second membre Ae^{rx} , second membre $B \cos(\omega x)$ ou $B \sin(\omega x)$.
4. Penser au principe de superposition en exercices.
5. Existence et unicité au problème de Cauchy.

Équations différentielles

Une *équation différentielle* est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, et qui fait aussi intervenir des dérivées de cette fonction. L'*ordre* de l'équation est le nombre maximal de fois où la fonction est dérivée. La fonction en jeu est notée y . Par exemple,

- l'équation $y^{(5)} = \frac{1}{2}(y + y')$ est une équation différentielle d'ordre 5.
- l'équation différentielle $y'' + xy' + x^2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

Résoudre des équations différentielles est en général un problème ardu. En MPSI, on se limite à l'étude des équations différentielles de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équation différentielle linéaire du premier ordre)
- $y'' + ay' + by = f(x)$ (équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants)

où a , b et f sont des fonctions réelles ou complexes continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (les fonctions a et b étant constantes dans le deuxième cas), et l'inconnue y peut être recherchée comme fonction à valeurs réelles ou à valeurs complexes.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient a et b des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

c'est trouver toutes les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables et telles que $\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.

On introduit l'équation différentielle homogène associée

$$(H) \quad y' + a(x)y = 0$$

- $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension 1.
- $\mathcal{S}_E$ est un espace affine de dimension 1 et de direction $\mathcal{S}_H$,

$$\mathcal{S}_E = \text{solution particulière de } (E) + \mathcal{S}_H$$

Propriété 1

Soit A une primitive de a sur I . Les solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto ce^{-A(x)}$ pour c décrivant $\mathbb{K}$.

Méthode – variation de la constante

Pour rechercher une solution particulière, on dispose de la *méthode de la variation de la constante*. L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto c(x)e^{-A(x)}$ (c n'est plus une constante, d'où le nom donné à la méthode).

Propriété 2

Soient a et b des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, x_0 un point de I et y_0 une valeur de $\mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' + a(x)y &= b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$
 admet une et une seule solution.

Exercice 1 : Résoudre $y' - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}y = 0$ sur $I =]-1, 1[$.

Exercice 2 :

1. IMPORTANT ! Pour la méthode de la variation de la constante, il n'y a pas de gros calculs de dérivées ! Expliquer pourquoi en menant les calculs théoriques.
2. Résoudre $y' - y = \operatorname{sh}(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. Résoudre $y' - \frac{(x^2-1)}{x(x^2+1)}y = -\frac{2}{x^2+1}$ sur $I =]0, +\infty[$.

Exercice 3 :

1. Rappeler le principe de superposition.
2. En utilisant le principe de superposition, résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - y &= (\cos t)e^t + e^{2t} \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(1) &= 0 \end{cases}$$

2 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient a et b dans $\mathbb{K}$ et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$(E) : y'' + ay' + by = f(t)$$

c'est trouver toutes les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivables et telles que

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

On introduit $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

- $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension 2.
- $\mathcal{S}_E$ est un espace affine de dimension 2 et de direction $\mathcal{S}_H$,

$$\mathcal{S}_E = \text{solution particulière de } (E) + \mathcal{S}_H$$

2.1 résolution de l'équation homogène

Le polynôme $X^2 + aX + b$ est le *polynôme caractéristique* associé à l'équation différentielle.

Propriété 3 – cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes du polynôme caractéristique de (H) .

- Si $r_1 \neq r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

- Si $r_1 = r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

Exercice 4 (pour vous entraîner) :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' - y' - 12y = 0$. $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}(x \mapsto e^{-3x}, x \mapsto e^{4x})$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$. $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(x \mapsto e^{-2x}, x \mapsto xe^{-2x})$

Propriété 4 – cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si le polynôme caractéristique de (H) admet deux racines réelles $r_1 \neq r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si le polynôme caractéristique de (H) admet une unique racine réelle r alors les solutions de (H) sont de la forme

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si le polynôme caractéristique de (H) admet deux racines complexes non réelles $r - i\omega$ et $r + i\omega$ alors les solutions de (H) sont de la forme

$$t \mapsto e^{rt} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore

$$t \mapsto \alpha e^{rt} \cos(\omega t - \varphi), \quad (\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 5 (pour vous entraîner) :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$. $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto x e^x)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$. $\mathcal{S}_3 = \text{Vect}(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = 0$.
 $\mathcal{S}_4 = \text{Vect}(x \mapsto \cos(3x)e^{-x}, x \mapsto \sin(3x)e^{-x})$

2.2 recherche d'une solution particulière

Nous verrons, dans le chapitre suivant, une méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2. Voici les cas particuliers au programme de MPSI.

Propriété 5 – second membre polynomial

L'équation différentielle $y'' + ay' + by = P(t)$ admet une solution particulière polynomiale Q de degré au plus $\deg(P) + 2$.

Il faut écrire la forme générale de Q (par exemple $Q(x) = ax^2 + bx + c$) et déterminer Q en reportant dans l'équation différentielle.

Plus précisément, une solution particulière polynomiale est :

- de degré $\deg(P)$ si $b \neq 0$,
- de degré $\deg(P) + 1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$,
- de degré $\deg(P) + 2$ si $a = b = 0$ (cas facile de toute façon en primitivant $y'' = P(t)$).

Par exemple, pour rechercher une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = t$, je peux la rechercher sous la forme $\alpha t + \beta$, et par calcul de dérivées, nous sommes amenés à résoudre

$$0 + \alpha + (\alpha t + \beta) = t$$

et on trouve comme solution particulière de (E) : $y_{part}(t) = t - 1$.

Propriété 6 – second membre exponentiel

$(A, r) \in \mathbb{C}$. L'équation différentielle $y'' + ay' + by = Ae^{rt}$ possède une solution particulière de la forme suivante, où $B \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} t \mapsto Be^{rt} & \text{si } r \text{ n'est pas racine du polynôme caractéristique} \\ t \mapsto Bte^{rt} & \text{si } r \text{ est racine simple du polynôme caractéristique} \\ t \mapsto Bt^2e^{rt} & \text{si } r \text{ est racine double du polynôme caractéristique} \end{cases}$$

Il faut déterminer B en reportant dans l'équation différentielle.

En présence de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = A \cos(kt)e^{rt}$ ou $y'' + ay' + by = A \sin(kt)e^{rt}$ avec A, k, r réels, on se ramène à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = Ae^{ikt}e^{rt} = Ae^{(r+ik)t}$ de la propriété précédente, on en trouvera des solutions particulières, et on en prendra les parties réelle ou imaginaire.

Exercice 6 (pour vous entraîner) :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - y = e^{2x} - e^x$ sous les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Réponse $\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^x + \frac{5}{12}e^{-x}\}$

2. Rechercher les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$.

Réponse

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{(2 \cos x + 3 \sin x)}{13}e^x + (\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))e^{-\frac{x}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

2.3 problème de Cauchy

Conformément au programme, nous admettons le théorème suivant.

Théorème 1

Soit $t_0 \in I$ et $(c, d) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une et une seule solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by &= f \\ y(t_0) &= c \\ y'(t_0) &= d \end{cases}$$

Pour résoudre un problème de Cauchy par le calcul, on commence par résoudre l'équation différentielle. Une fois que c'est fait, on affine la résolution en prenant en compte les conditions initiales.

3 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Propriété 1

- Pour c réel, la fonction $f : x \mapsto ce^{-A(x)}$ est dérivable sur I et on a $f'(x) = -cA'(x)e^{-A(x)} = -A'(x)f(x) = -a(x)f(x)$ pour $x \in I$. Donc f est solution de $y' + a(x)y = 0$.
- Réciproquement, soit y une solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$. On introduit $f(x) = y(x)e^{A(x)}$. f est dérivable sur I et pour $x \in I$,

$$f'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)} = 0$$

donc f est constante, et il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = c$, puis $y(x) = ce^{-A(x)}$.

Méthode de la variation des constantes en page 2

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \text{ pour } x \in I \\ &\Leftrightarrow c'(x)e^{-A(x)} - a(x)c(x)e^{-A(x)} + a(x)y(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow c'(x) = b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ est continue sur I , elle admet des primitives. La fonction c existe, on n'oublie pas de la reporter pour avoir $y_{part}(x) = c(x)e^{-A(x)}$. Il existe donc une solution de (E) . Comme on a vu que (H) admettait une infinité de solutions, on en déduit que (E) admet une infinité de solutions.

Propriété 2

Soit A la primitive de a sur I s'annulant en x_0 . Nous avons déterminé l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$:

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto ce^{-A(x)}, c \in \mathbb{K}\}$$

Lors de la méthode de la variation de la constante, nous avons montré qu'une solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ était $y_{part}(x) = c(x)e^{-A(x)}$ où c est l'une des primitives sur I de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$, par exemple

$$c(x) = \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt. \text{ Donc}$$

$$\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt + ce^{-A(x)}, c \in \mathbb{K}\}$$

Ainsi, y est solution au problème de Cauchy donné si et seulement si $y_0 = y(x_0) = c$. Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy donné, qui est

$$y : x \mapsto e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt + y_0 \right)$$

Propriété 3

Soit y deux fois dérivable sur I . Introduisons $z(t) = y(t)e^{-r_1 t}$. On a $y(t) = z(t)e^{r_1 t}$. Pour $t \in I$,

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{r_1 t}(r_1 z(t) + z'(t)) \\ y''(t) &= e^{r_1 t}(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)) \end{aligned}$$

On a en réaménageant :

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 &\Leftrightarrow e^{r_1 t}(z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) + (r_1^2 + ar_1 + b)z(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{r_1 t}(z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) + (0)z(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi y est solution de (H) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre $f' + (2r_1 + a)f = 0$.

Comme $x^2 + ax + b = (x - r_1)(x - r_2)$, on a $r_1 + r_2 = -a$, et donc $2r_1 + a = 0$ si et seulement si $r_1 = r_2$.

- Si $r_1 \neq r_2$, les solutions de $f' + (2r_1 + a)f = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-(2r_1 + a)t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Donc y est solution de (H) si et seulement si $z'(t) = \lambda e^{-(2r_1 + a)t}$ si et seulement si z est de la forme $t \mapsto \alpha e^{-(2r_1 + a)t} + \beta$ avec α et β dans $\mathbb{C}$. En multipliant par $e^{r_1 t}$, on obtient y de la forme annoncée.

- Si $r_1 = r_2$, alors $2r_1 + a = 0$ et y est solution de (H) si et seulement si $z'' = 0$ si et seulement si $z' = cte$ si et seulement si z est de la forme $t \mapsto \lambda t + \mu$. En multipliant par $e^{r_1 t}$, on obtient y de la forme annoncée.

Propriété 4

Les deux premiers cas se traitent comme dans le cas complexe. Plaçons-nous dans le cas où le polynôme caractéristique de (H) admet deux racines complexes non réelles $r - i\omega$ et $r + i\omega$.

Soit y une solution de (H) . y pouvant être vue comme une solution complexe, il existe deux complexes α et β tels que

$$y(t) = \alpha e^{(r+i\omega)t} + \beta e^{(r-i\omega)t} \text{ pour } t \in I$$

y est à valeurs réelles et correspond donc à sa partie réelle, qui est

$$(\operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Re}(\beta))e^{rt} \cos(\omega t) + (\operatorname{Im}(\beta) - \operatorname{Im}(\alpha))e^{rt} \sin(\omega t)$$

qui est bien de la forme annoncée $e^{rt}(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$.

Réciproquement, par un calcul de dérivées que je vous laisse mener, on vérifie que toute fonction de la forme $t \mapsto e^{rt}(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$ est solution de (H) .