Intégrales dépendant d'un paramètre

Conformément au programme, les théorèmes de ce chapitre sont admis. Ce chapitre est MAJEUR, il faut maîtriser tout ce qui suit !

Convergence dominée

1. Théorème de convergence dominée pour $\int_I f_n$.
2. Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Intégration terme à terme

3. Théorème d'intégration terme à terme pour $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t$ avec $f_n \geqslant 0$.
4. Théorème d'intégration terme à terme quand $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$.
5. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

6. Théorème de continuité pour $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
7. Théorème de dérivation et classe $\mathcal{C}^1$ pour $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$.

Dans ce chapitre, on considère des fonctions de la variable réelle, définie sur un intervalle I non vide et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Théorèmes de passage à la limite sous le signe intégral

1.1 théorème de convergence dominée

On étudie pour commencer des limites du type $\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

- Dans le cadre d'un segment $I = [a,b]$, nous avons vu :

$$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [a,b] \\ \text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,b] \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$$

- Dans le cadre d'un intervalle quelconque, avec une hypothèse de domination, nous avons vu :

Théorème 1 – théorème de convergence dominée – admis

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux
- il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur I et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Conformément au programme, pour l'application pratique du théorème de convergence dominée, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination mais pas les hypothèses de continuité par morceaux.

Exercice 1 : Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2\sin(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 : Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque : y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 3 : Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^n+e^t}\,\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{e}$.

> Dans le théorème de convergence dominée, l'intervalle d'intégration est fixe. Prolonger la fonction par la fonction nulle permet parfois de contourner cette difficulté.

Exercice 4 : Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Le programme permet d'étendre le théorème de convergence dominée à une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2 – admis

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions indexées par un intervalle J de $\mathbb{R}$, continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. Soit λ_0 un point adhérent à J, ou $\lambda_0 = \pm\infty$. On fait les hypothèses suivantes :

- il existe une fonction f continue par morceaux sur I telle que pour tout $t \in I$, $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t) = f(t)$
- il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant

$$\forall \lambda \in J,\ \forall t \in I,\ |f_\lambda(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur I et on a :

$$\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \int_I f$$

Remarques : le plus souvent, $\lambda_0 = \pm\infty$. Par le caractère local de la limite, si $\lambda_0 = +\infty$, il suffit d'établir une domination pour λ appartenant à un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

Exercice 5 : Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ de deux façons :

1. par le théorème de convergence dominée,
2. par encadrement et théorème des gendarmes.

Méthodes – déterminer la limite d'une suite d'intégrales

Pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales, on dispose de plusieurs moyens :

— interversion limite-intégrale dans le cas où il y a convergence uniforme de la suite des intégrandes sur un segment

— théorème de convergence dominée

— de bons encadrements et le théorème des gendarmes

— exprimer différemment l'intégrale (intégration par parties, changement de variable, astuce...)

— raisonner avec des ε en se laissant guider par l'énoncé.

Il ne faut pas croire qu'on peut toujours intervertir limite et intégrale, car c'est faux !

Par récurrence, on peut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$. On constate donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,\mathrm{d}t = 1 \quad \neq \quad 0 = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} \right) \mathrm{d}t$$

1.2 le cas particulier des séries de fonctions

On étudie maintenant des séries de fonctions $\sum f_n$ et on se demande si la somme est intégrable sur I et si on peut permuter les symboles $\sum$ et $\int$:

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cadre d'un segment $I = [a, b]$, nous avons vu :

$$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [a,b] \\ \text{la série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a,b] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Cela ne permet pas de répondre à toutes les situations.

Théorème 3 – théorème d'intégration terme à terme – cas positif

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs **positives**, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et telle que sa somme soit continue par morceaux sur I.

Alors, dans $[0, +\infty]$, on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

En particulier, l'intégrabilité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Théorème 4 – théorème d'intégration terme à terme – cas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_I |f_n| < +\infty$

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et telle que sa somme soit continue par morceaux.
Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t < +\infty$, alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t$$

Conformément au programme, pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Exercice 6 : À l'aide des théorèmes précédents,

1. montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$,
2. montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Méthodes – intervertir somme et intégrale

Pour intervertir $\sum$ pour une somme de série et $\int\limits_I$, on dispose de plusieurs façons de faire :

- sur un segment, utiliser la convergence uniforme de $\sum f_n$
- intégrer terme à terme pour une série entière sur un segment de l'intervalle ouvert de convergence
- en présence de fonctions f_n positives, pour un résultat lu dans $[0, +\infty]$, on peut intervertir
- si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t < +\infty$, on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme
- sinon, on peut essayer de calculer directement la limite de la suite de sommes partielles (S_n) en jeu (ce qui peut aussi faire intervenir le théorème de convergence dominée).

Il ne faut pas penser que l'interversion est toujours vraie.

Exercice 7 :

1. On souhaite montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-t^2)^k \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t^2)^k \, \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que le théorème d'intégration terme à terme de ce chapitre ne s'applique pas.
   (b) On revient à la suite (S_n) des sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_0^1 (-t^2)^k \, \mathrm{d}t$. Calculer $\lim S_n$ et conclure.
2. Mêmes questions pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{t^{3k+3}} \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^k}{t^{3k+3}} \, \mathrm{d}t$.

2 Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Notation : soit $f : \begin{pmatrix} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{pmatrix}$.

$f(x,.)$ désigne l'application

$f(.,t)$ désigne l'application

2.1 continuité

Théorème 5 – théorème de continuité sous le signe intégral

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé et f une fonction définie sur $A \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue,
- pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux,
- hypothèse de domination : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Comme la continuité est une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur A par la domination sur tout compact de A. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la domination sur tout segment de A, ou sur toute famille d'intervalles adaptée à la situation.

Exercice 8 : Montrer que $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10 : Montrer que $B : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2.2 dérivabilité

Théorème 6 – théorème de dérivabilité sous le signe intégral

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,
- pour tout $x \in J$, la fonction $f(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- hypothèse de domination : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de J,

$$\forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques :
En pratique, si on n'arrive pas à effecter une domination globale, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de J, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

L'hypothèse de domination ne portant que sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, il ne faut pas oublier l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ pour être bien assuré de l'existence de $g(x)$.

Exercice 11 : Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Théorème 7 – théorème de régularité sous le signe intégral

On peut étendre le théorème précédent à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Exercice 12 : Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.