

# Endomorphismes d'un espace euclidien

## Les attentes

---



1. Matrices orthogonales : définition par  $A^\top A = I_n$ , caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes. Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée.
2. Savoir définir l'adjoint d'un endomorphisme. Propriétés (linéarité, adjoint d'un inverse, adjoint d'une composée, involutivité).
3. Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
4. Si  $F$  est stable par  $u$ , alors ...
5. Étude des endomorphismes autoadjoints ( $u^* = u$ ). Théorème spectral.
6. Cas particulier des projecteurs orthogonaux.
7. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale. Notations  $\mathcal{S}^+(E)$ ,  $\mathcal{S}^{++}(E)$ .
8. Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale.
9. Étude des isométries : définition par la conservation des normes. Propriétés :  $u^* = u^{-1}$ , conservation du produit scalaire, conservation des bases orthonormées.
10. Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal.
11. Théorème de réduction des isométries dans une base orthonormée.



1. Théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien.
  2. Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2. Classification des isométries d'un plan euclidien.
  3. Isomorphisme de  $\mathbb{U}$  sur  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ . Le groupe  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  est commutatif.
- 

Dans tout le chapitre  $E$  désigne un espace euclidien, muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

# 1 Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée

Pour tout vecteur de  $E$ , on a la décomposition dans une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

Donc les coordonnées de  $u(e_j)$  relativement aux  $e_i$  valent  $\langle u(e_j), e_i \rangle$ .

$$\text{mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_n) \\ \langle u(e_1), e_1 \rangle & \langle u(e_2), e_1 \rangle & \dots & \langle u(e_n), e_1 \rangle \\ \langle u(e_1), e_2 \rangle & \langle u(e_2), e_2 \rangle & \dots & \langle u(e_n), e_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u(e_1), e_n \rangle & \langle u(e_2), e_n \rangle & \dots & \langle u(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = M$$

Calculons  $M^\top M$  :

## 2 Matrices orthogonales

### 2.1 caractérisation des matrices orthogonales

#### Définition 1

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *orthogonale* si  $A^\top A = I_n = AA^\top$ .

Autrement dit,  $A$  est une matrice orthogonale si  $A$  est inversible, d'inverse égal à sa transposée. Comme d'habitude, il suffit d'avoir  $A^\top A = I_n$  ou  $AA^\top = I_n$  pour avoir  $A^\top A = I_n = AA^\top$ .  $I_n$  est une matrice orthogonale.

Soit une matrice de passage  $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  entre deux bases orthonormées  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $E$ .

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} =$$

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} =$$

$$P^{\top} P = I_n = P P^{\top}$$

#### Propriété 1

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :


1.  $A$  est une matrice orthogonale
2. la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  des colonnes de  $A$  est une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
3. la famille  $(L_1, \dots, L_n)$  des lignes de  $A$  est une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$
4.  $A$  est la matrice de passage entre deux bases orthonormées.

#### Définition - propriété 1

Deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont *orthogonalement semblables* s'il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que

$$B = P^{-1} A P = P^{\top} A P$$

$A$  et  $B$  représentent alors le même endomorphisme dans deux bases orthonormales.

 Exercice 1 : Soit  $A$  une matrice orthogonale. Montrer que  $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ . On donnera deux réponses :


- l'une avec la connaissance des isométries,
- l'autre par le calcul de  $\|AX\|^2$ .

## 2.2 groupe orthogonal

Si  $A$  est une matrice orthogonale,  $\det(A^{\top} A) = \det(I_n)$ , donc  $(\det(A))^2 = \det(A^{\top}) \det(A) = 1$  et donc  $\det(A) = \pm 1$ . Ceci nous amène à distinguer deux types de matrices orthogonales.

### Définition - propriété 2

- L'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , appelé *groupe orthogonal* et noté  $O_n(\mathbb{R})$  ou  $O(n)$ .
- Une matrice orthogonale  $A$  est dite *positive*, ou *directe*, si  $\det A = 1$ .  
L'ensemble des matrices orthogonales positives est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , appelé *groupe spécial orthogonal* et noté  $SO_n(\mathbb{R})$  ou  $SO(n)$ .
- Une matrice orthogonale  $A$  est dite *négative*, ou *indirecte*, si  $\det A = -1$ .  
L'ensemble des matrices orthogonales négatives n'est pas un groupe.

 Exercice 2 : Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  et  $SO_n(\mathbb{R})$  sont des compacts.

## 2.3 orientation d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormales de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . On a vu que  $P$  était une matrice orthogonale, donc son déterminant est égal à 1 ou à  $-1$ .

On dit que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  *définissent la même orientation* si  $\det(P) = 1$ .

*Orienter l'espace* consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de  $E$ . Toutes les bases qui définissent la même orientation sont dites *directes*. Les autres sont dites *indirectes*.

Orienter l'espace revient donc à choisir une des deux classes d'équivalence associées à la relation d'équivalence définie par «  $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}'$  si et seulement si  $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = 1$  ».



- Par convention, les bases orthonormales directes de  $\mathbb{R}^3$  sont celles qui respectent la règle de la main droite.
- En pratique, dans  $\mathbb{R}^n$ , on choisit toujours la base canonique comme base directe de référence.
- Pour  $E$  espace euclidien orienté et  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  bases orthonormées directes de  $E$ , on a  $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$ . Cela vient de la formule de changement de base pour les déterminants :

### 3 Adjoint d'un endomorphisme

#### Théorème 1 – représentation des formes linéaires

Pour toute forme linéaire  $\varphi$ , il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

#### Définition - propriété 3

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe un unique endomorphisme  $u^*$  de  $E$  vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Cet endomorphisme  $u^*$  s'appelle *l'adjoint* de  $u$ .

Par exemple,  $\text{Id}^* =$

et  $0^* =$

#### Propriété 2 – propriétés de $u \mapsto u^*$

**Linéarité :** l'application  $u \mapsto u^*$  est linéaire.

**Involution :** l'application  $u \mapsto u^*$  est involutive, c'est-à-dire que  $(u^*)^* = u$ .

**Composition :**  $(u \circ w)^* = w^* \circ u^*$ .

**Inversibilité :** si  $u$  est bijective,  $u^*$  l'est aussi et  $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$ .

Exercice 3 : Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $\ker u^* = (\text{Im } u)^\perp$  et que  $\text{Im } u^* = (\ker u)^\perp$ .

#### Propriété 3

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base **orthonormale** de  $E$ . On a  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$ .

Il s'ensuit que les endomorphismes  $u$  et  $u^*$  ont même rang, même déterminant, même trace et même polynôme caractéristique.

#### Propriété 4

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

## 4 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

### 4.1 généralités

#### Définition 2

On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est *autoadjoint* si  $u^* = u$ , c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

On note  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.

Par exemple,  $\text{Id}$  et plus généralement  $\alpha \text{Id}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), sont autoadjoints.

#### Propriété 5

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\mathcal{B}$  une base **orthonormée** de  $E$ .

$$u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$$

Un endomorphisme autoadjoint est parfois appelé endomorphisme symétrique, en vertu de la propriété précédente, et cela explique la notation  $\mathcal{S}(E)$ .

#### Propriété 6

$\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ , et  $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

### 4.2 réduction des endomorphismes autoadjoints

Rappelons que si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ . Dans le cas d'un endomorphisme autoadjoint, nous avons donc :

#### Propriété 7

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Si un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

#### Propriété 8

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

#### Théorème 2 – Théorème spectral

Si  $u$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ , alors  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormale. Plus précisément, pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $u$  est autoadjoint.
2. Il existe une base orthonormée de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ .

$$3. E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^\perp E_\lambda(u)$$

### Corollaire 1

Toute matrice symétrique **réelle**  $A$  est orthogonalement diagonalisable : il existe une matrice orthogonale  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que

$$A = PDP^{\top}$$

Exercice 4 : Le résultat précédent ne s'étend pas dans  $\mathbb{C}$ . Montrer en effet que la matrice symétrique  $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable.

Exercice 5 : Montrer que pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M^{\top} M$  est diagonalisable.

Exercice 6 : Diagonaliser orthogonalement  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Exercice 7 : Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien  $E$ , et  $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ . En utilisant le théorème spectral, montrer que le minimum de  $f$  sur  $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$  est égal à la plus petite valeur propre de  $u$ , et que le maximum de  $f$  sur  $S$  est égal à la plus grande valeur propre de  $u$ .

## 4.3 endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

### Définition 3

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

- On dit que  $u$  est autoadjoint *positif* si :  $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$ .
- On dit que  $u$  est autoadjoint *défini positif* si :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad (\langle u(x), x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$$

On note  $\mathcal{S}^+(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de  $E$  et  $\mathcal{S}^{++}(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de  $E$ .

### Propriété 9 – Caractérisation spectrale

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint.

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}^+(E) &\Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+ \\ u \in \mathcal{S}^{++}(E) &\Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

### Définition - propriété 4 – Caractérisation spectrale

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est une matrice :

- *symétrique positive*, et on note  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top AX = \langle AX, X \rangle \geq 0 \quad \text{ou encore} \quad \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$$

- *symétrique définie positive*, et on note  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , si :

$$\begin{cases} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^\top AX = \langle AX, X \rangle \geq 0 \\ X^\top AX = 0 \Rightarrow X = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$$

Par calcul matriciel, nous obtenons des *formes quadratiques* (hors-programme) :

$$X^\top AX =$$

et si  $D$  est une matrice diagonale,

$$X^\top DX =$$

 Exercice 8 : Soit  $M$  une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ . Montrer que (1)  $\Leftrightarrow$  (2), où :

1.  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
2. il existe une matrice  $R$  symétrique réelle telle que  $M = R^2$ .

## 5 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

### 5.1 généralités sur les isométries

Dans d'anciens sujets de concours, vous pouvez rencontrer la terminologie *automorphisme orthogonal* à la place de *isométrie vectorielle*.

### Définition - propriété 5

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $u$  conserve la norme :  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .
2.  $u$  conserve le produit scalaire :  $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .
3.  $u$  conserve les bases orthonormées : pour  $(e_1, \dots, e_n)$  base orthonormée de  $E$ ,  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .

On dit alors que  $u$  est une *isométrie vectorielle* de  $E$ .

Par exemple,



#### Propriété 10

L'ensemble des isométries vectorielles de  $E$  est un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$ , appelé *groupe orthogonal* de  $E$  et noté  $\text{O}(E)$ .

#### Propriété 11

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

$$u \text{ est une isométrie vectorielle} \Leftrightarrow \begin{cases} u & \text{est bijectif} \\ u^{-1} & = u^* \end{cases}$$

#### Propriété 12

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

$$\begin{aligned} u \text{ est une isométrie} &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\text{la matrice de } u \text{ dans toute base orthonormale est orthogonale} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de } u \\ &\text{est orthogonale} \end{aligned} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le déterminant d'une isométrie vaut 1 ou  $-1$ .

#### Définition - propriété 6

- Une isométrie  $u$  est dite *positive*, ou *directe*, si son déterminant vaut 1. L'ensemble des isométries positives est un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$ , appelé *groupe spécial orthogonal* et noté  $\text{SO}(E)$ .
- Une isométrie  $u$  est dite *négative*, ou *indirecte*, si son déterminant vaut  $-1$ . L'ensemble des isométries négatives n'est pas un groupe.

Remarques :

— Pour  $\mathcal{B}$  base orthonormée de  $E$ , on a les équivalences suivantes :

$$u \in \text{SO}(E) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in \text{O}(E) \\ \det u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \\ \det \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$$

— Par formule sur les déterminants,

$$\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

donc  $u$  transforme une base orthonormale directe de  $E$  en base orthonormale directe si, et seulement si,  $u \in \text{SO}(E)$ .

## 5.2 isométries vectorielles en dimension 2

### Propriété 13

$O_2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices de la forme  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  et  $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
Plus précisément,

$$\begin{aligned} M \in SO_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, M = R(\theta) \\ M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, M = S(\theta) \end{aligned}$$

### Propriété 14

Pour  $\theta, \theta'$  réels,  $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$ . Le groupe  $SO_2(\mathbb{R})$  est commutatif et isomorphe à  $\mathbb{U}$ .

### Propriété 15

Ici  $E$  est un espace euclidien orienté de dimension 2. Soit  $u \in O(E)$ .

- Si  $u \in SO(E)$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$ , unique modulo  $2\pi$ , tel que pour toute base orthonormée directe  $\mathcal{B}$ , on ait  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$ . On dit que  $u$  est une *rotation d'angle*  $\theta$ .
- Si  $u \in O(E) \setminus SO(E)$ , alors il existe une base orthonormée dans laquelle  $\text{mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , et  $u$  est une réflexion.

## 5.3 réduction des isométries

### 5.3.1 cas général

Énonçons deux lemmes nécessaires à la démonstration du « gros » théorème de réduction :

#### Lemme 1

Pour  $u \in O(E)$ ,  $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ .

#### Lemme 2

Si  $F$  est stable par l'isométrie vectorielle  $u$ , alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

### Théorème 3

Soit une isométrie vectorielle  $u \in O(E)$ . Il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme  $(1)$ ,  $(-1)$  et  $R(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

Autrement dit, il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & R(\theta_1) & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} \text{ avec } (\theta_1, \dots, \theta_r) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^r$$

### Corollaire 2

Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe une matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et une matrice  $D$  diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme  $(1)$ ,  $(-1)$  et  $R(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , telles que  $A = PDP^\top$ .

### 5.3.2 réduction des isométries positives en dimension 3

Dans ce paragraphe,  $E$  est un espace euclidien orienté de dimension 3. Par le théorème de réduction, quand on enlève les redondances, la matrice de  $u$  isométrie de  $E$  est, dans une certaine base orthonormée, de la forme  $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Soit  $u \in \text{SO}(\mathbb{R}^3)$ . Il existe une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . On dit que  $u$  est une rotation d'angle  $\theta$ .

Il existe une droite  $D$  et un plan  $P = D^\perp$  tel que  $u_D = \text{Id}_D$  et  $u_P$  soit une rotation.

Conformément au programme, la pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  n'est pas un attendu du programme. Terminons tout de même par un exemple.

Exercice 9 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ . Déterminer les caractéristiques de  $u$  en complétant les questions suivantes.

- $u$  est une isométrie car :
- $u$  est une isométrie positive car :
- L'ensemble des invariants de  $u$  est  $D = \text{Vect}(n)$ , où  $n =$
- Pour  $P = D^\perp$ ,  $u_P$  est par propriété une rotation. Son angle  $\theta$  vérifie :
- On prend  $b_2 = (1, 1, 1)$ ,  $b_2 = (1, -1, 0)$ . Proposer  $b_3$  tel que  $(b_1, b_2, b_3)$  soit une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ . En travaillant dans le plan  $P = \text{Vect}(b_2, b_3)$ , déterminer finalement  $\theta$ .

## 6 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

### Définition 4

On appelle *projecteur orthogonal* de  $E$  tout projecteur sur un sous-espace vectoriel  $F$  et parallèlement à  $F^\perp$ .

On appelle *symétrie orthogonale* de  $E$  toute symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

On appelle *réflexion* de  $E$  toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de  $E$ .

Exercice 10 : Soient  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $\vec{n}$  et  $s$  la réflexion par rapport à  $H$ . Donner l'expression de  $s(x)$  pour  $x \in E$ .

### Propriété 16

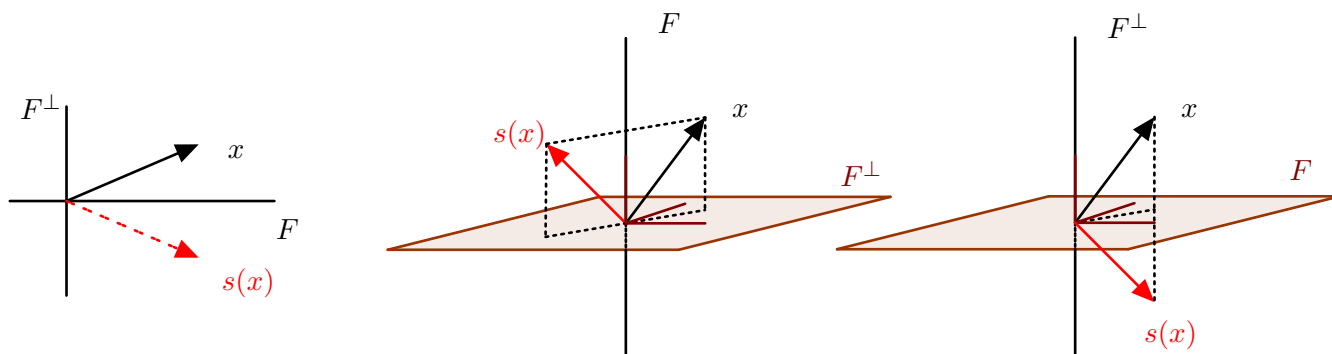
Soit  $p$  un projecteur de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base **orthonormée** de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $p$  est un projecteur orthogonal.
2.  $\ker p = (\operatorname{Im} p)^\perp$  (à retenir sur un schéma).
3.  $p$  est un endomorphisme autoadjoint.
4.  $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p)$  est une matrice symétrique.

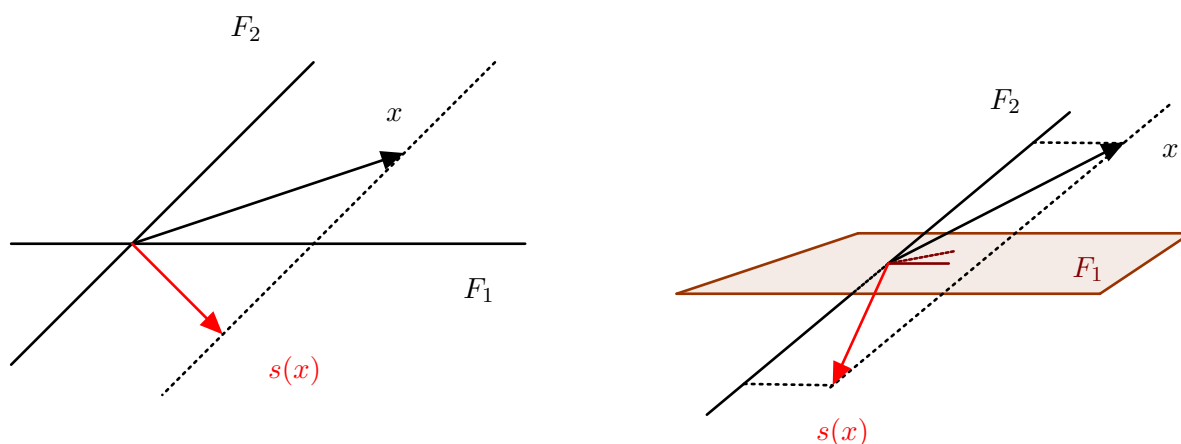
Exercice 11 :

1. Montrer qu'une symétrie de  $E$  est une symétrie orthogonale si, et seulement si,  $s^* = s$ .
2. Montrer qu'une symétrie est une isométrie vectorielle si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale.

### Trois schémas de symétries orthogonales – isométries



### Deux symétries non orthogonales – pas des isométries



Exercice 12 : Nous reprenons les schémas en page 13 pour voir, dans chaque cas de symétrie orthogonale, si  $s$  est une isométrie positive ou négative, en mettant en parallèle le calcul de  $\det(s)$ .

## 7 Annexe : quelques éléments de démonstrations

### Propriété 1

$$\bullet \langle C_i, C_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = [A^\top A]_{i,j}.$$

Donc  $A$  est une matrice orthogonale si et seulement si  $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$  si et seulement si  $(C_1, \dots, C_n)$  est une famille orthonormée.

Par ailleurs, une famille orthonormée est libre. Donc une famille orthonormée à  $\dim E$  vecteurs est une base de  $E$ .

Donc  $A$  est une matrice orthogonale si et seulement si  $(C_1, \dots, C_n)$  est une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Même type de raisonnement avec les lignes (on peut aussi raisonner sur la transposée de  $A$ ).

• On a vu en classe l'implication «  $A$  est la matrice de passage entre deux bases orthonormées »  $\Rightarrow A^\top A = I$ .

Réciproquement, si  $A^\top A = I$ , le premier point montre que la famille des colonnes de  $A$  est une base orthonormée  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique.  $A$  est la matrice de passage entre la base canonique, orthonormée, et la base  $\mathcal{C}$ .

### Définition-propriété 2

•  $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ .

$I_n \in O_n(\mathbb{R})$

Soient  $A$  et  $B$  dans  $O_n(\mathbb{R})$ . On montre que  $AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} (AB^{-1})^\top AB^{-1} &= (AB^\top)^\top AB^\top = BA^\top AB^\top \\ &= BB^\top = I_n \end{aligned}$$

• On complète ce qui précède avec  $\det(I_n) = 1$  et  $\det((AB^{-1})^\top) = \det(AB^{-1}) = \det(A) \frac{1}{\det B} = \frac{1}{1} = 1$ .

• Le produit de deux matrices de déterminant  $-1$  est de déterminant  $1$ .

### Théorème 1 (théorème de représentation de Riesz)

DÉMONSTRATION 1

Comme  $E$  est un espace euclidien, il possède une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $a \in E$ . La forme linéaire  $x \mapsto \langle x, a \rangle$  est égale à  $\varphi$  si, et seulement si, elle coïncide avec  $\varphi$  sur une base de  $E$ , soit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = \langle e_i, a \rangle$$

Or par l'écriture d'un vecteur dans une base orthonormée,  $a = \sum_{i=1}^n \langle e_i, a \rangle e_i$ .

Donc le vecteur  $a$  est solution du problème si et seulement si  $a = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i$ .

DÉMONSTRATION 2

Montrons que l'application  $f : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & (x \mapsto \langle x, a \rangle) \end{pmatrix}$  est un isomorphisme.

—  $f$  est linéaire.

—  $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

—  $f$  est injective : soit  $a \in \ker f$ . On a  $a \in E^\perp = \{0\}$ .

Donc  $f$  est bijective.

### Définition-propriété 3

• Existence et unicité

Soit  $y \in E$ . L'application  $x \mapsto \langle u(x), y \rangle$  est une forme linéaire. D'après le théorème de représentation, il existe un unique vecteur dépendant de  $y$  donc qu'on peut noter  $a(y)$  tel que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle a(y), x \rangle$$

On pose alors  $u^*(y) = a(y)$ . Pour tous  $x, y \in E$ ,  $\langle u(x), y \rangle = \langle u^*(y), x \rangle$ .

• Linéarité

Il ne reste qu'à vérifier la linéarité de  $u^*$ . Soient  $y, z \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On va vérifier que  $u^*(\lambda y + z) - (\lambda u^*(y) + u^*(z))$  est dans  $E^\perp = \{0\}$ . Par bilinéarité du produit scalaire, pour  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \langle u^*(\lambda y + z) | x \rangle &= \langle \lambda y + z | u(x) \rangle \\ &= \lambda \langle y | u(x) \rangle + \langle z | u(x) \rangle = \lambda \langle u^*(y) | x \rangle + \langle u^*(z) | x \rangle \\ &= \langle \lambda u^*(y) + u^*(z) | x \rangle \end{aligned}$$

$u^*(\lambda y + z) - (\lambda u^*(y) + u^*(z))$  est orthogonal à tout vecteur, donc est nul.

## Propriété 2

**Linéarité :** A été vue au cours de la définition-propriété 3.

**Involution :** Pour montrer que  $(u^*)^* = u$ , on montre que  $u$  satisfait, à la place de  $g$ , à la relation :

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$$

Ici,  $\langle x, g(y) \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \langle u(y), x \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle$ .

Dit autrement, puisque  $\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ , l'adjoint de  $u^*$  est bien  $u$  par unicité de l'adjoint.

**Composition :** Facile.

$$\langle u \circ w(x), y \rangle = \langle w(x), u^*(y) \rangle = \langle x, w^*(u^*(y)) \rangle$$

**Inversibilité :** On part de  $u \circ u^{-1} = \text{Id}$ . On a donc  $(u \circ u^{-1})^* = \text{Id}^* = \text{Id}$ . Par la propriété de composition,

$(u^{-1})^* \circ u^* = \text{Id}$ . Comme  $E$  est de dimension finie, l'inversibilité à gauche équivaut à l'inversibilité à droite, donc  $u^*$  est bijective, et on a trouvé son inverse.

## Propriété 3

On a vu en introduction, puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormée, que les coefficients de la matrice de  $u^*$  dans  $\mathcal{B}$  étaient

$$m_{i,j} = \langle u^*(e_j) | e_i \rangle = \langle e_j | u(e_i) \rangle = \langle u(e_i) | e_j \rangle = [\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)]_{j,i}$$

## Propriété 4

Soit  $F$  stable par  $u$  et soit  $x \in F^\perp$ . Soit  $y \in F$ .

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = 0$$

## Propriété 5

On commence par montrer le lemme :

### Lemme 3

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

$$u^* = u \Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i | u(e_j) \rangle$$

Puis on prend  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\mathcal{B}$  une base **orthonormée** de  $E$ . Soit  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . On a vu en introduction du chapitre :

$$m_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle$$

Par le lemme,  $u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \forall i, j, m_{i,j} = m_{j,i} \Leftrightarrow M \in S_n(\mathbb{R})$ .

## Propriété 6

•  $\text{Id} \in \mathcal{S}(E)$  et  $\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ .

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $u, v \in \mathcal{S}(E)$ . On a vu que  $u \mapsto u^*$  est linéaire.

Donc  $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^* = \lambda u + v$ .

$\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

Remarque :  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^* = v \circ u$  n'est égal à  $u \circ v$  que si  $u$  et  $v$  commutent.

• Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . L'application  $f : \begin{pmatrix} \mathcal{S}(E) & \rightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{pmatrix}$  est un isomorphisme.

Donc  $\dim \mathcal{S}(E) = \dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

## Propriété 8

Soient  $E_\alpha$  et  $E_\beta$  deux espaces propres de  $u \in \mathcal{S}(E)$  avec  $\alpha \neq \beta$ . Soient  $x \in E_\alpha$  et  $y \in E_\beta$ . On a  $u(x) = \alpha x$  et  $u(y) = \beta y$ .

$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$  donc  $\alpha \langle x, y \rangle = \beta \langle x, y \rangle$ . Puis  $\langle x, y \rangle = 0$ .

## Théorème 2

#### Lemme 4

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet une droite ou un plan stable.

Démonstration du lemme 4

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $\pi_u$  son polynôme minimal.

PREMIER CAS : si  $\pi_u$  admet une racine dans  $\mathbb{R}$ , alors  $u$  admet une valeur propre, et un vecteur propre associé  $e$ .  $\text{Vect}(e)$  est une droite stable par  $u$ .

DEUXIÈME CAS :  $\pi_u$  n'admet aucune racine dans  $\mathbb{R}$ . On peut l'écrire  $\pi_u = P_1 \times \cdots \times P_r$  produit de polynômes de degré 2 sans racines réelles.

$$0 = \pi_u(u) = P_1(u) \circ \cdots \circ P_r(u)$$

Par définition du polynôme minimal,  $P_1(u)$  n'est pas bijectif et n'est pas injectif. Notons  $P_1 = X^2 + aX + b$ . Il existe  $e \neq 0$  tel que  $P_1(u)(e) = 0$ . On a  $u^2(e) \in \text{Vect}(e, u(e))$ , ce qui permet d'avoir  $\text{Vect}(e, u(e))$  stable par  $u$ .

Remarque : il s'agit d'un plan, puisque  $e \neq 0$  et qu'on a supposé que  $u$  n'avait pas de valeur propre.

#### Lemme 5

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien non nul admet au moins une valeur propre.

Démonstration : soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  avec  $\dim E \geq 1$ .

Si  $\dim E = 1$  : il existe  $e \neq 0$  dans  $E$ .  $E = \text{Vect}(e)$  et  $u(e)$  est de la forme  $\alpha e$ .

Si  $\dim E = 2$  : la matrice de  $u$  dans une base orthonormale de  $E$  est symétrique, de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique est  $\chi_u = X^2 - (a+c)X + (ac-b^2)$  de discriminant  $(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ .

L'endomorphisme  $u$  admet donc au moins une valeur propre réelle.

Si  $\dim E > 2$  : l'endomorphisme  $u$  admet au moins une droite ou un plan stable (lemme 4). L'endomorphisme induit sur cette droite ou ce plan est encore autoadjoint et possède (par les deux premiers cas qu'on vient de traiter) une valeur propre.

• Montrons maintenant  $(1) \Rightarrow (2)$  : tout endomorphisme autoadjoint de  $E$  est diagonalisable dans une base orthonormale. On procède par récurrence sur la dimension de  $E$ .

$\mathcal{P}_n$  : « pour tout endomorphisme autoadjoint  $u$  d'un espace  $E$  de dimension  $n$ , il existe une base orthonormale de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ . »

— Soit  $E$  de dimension 1. La matrice de  $u \in \mathcal{L}(E)$  dans cette base est diagonale.  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

— Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{P}_n$  est vraie. Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint en dimension  $n+1$ . Par le lemme,  $u$  admet une valeur propre réelle, et un vecteur propre associé  $x_0$ .

$F = \text{Vect}(x_0)$  est stable par  $u$ . Par propriété,  $F^\perp$  est stable par  $u$  autoadjoint.

$u_F$  et  $u_{F^\perp}$  sont encore autoadjoints (à vérifier rapidement). Par  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_n$ , il existe  $\mathcal{B}_1$  base orthonormée de  $F$  et  $\mathcal{B}_2$  base orthonormée de  $F^\perp$  constituées de vecteurs propres de  $u$ .

Comme  $F \oplus F^\perp = E$ , la concaténation  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est une base orthonormée de  $E$ .

$\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie, ce qui achève la récurrence.

•  $(1) \Rightarrow (3)$ . On poursuit le raisonnement précédent pour  $u$  un endomorphisme autoadjoint en dimension  $n$ . Puisque  $u$  est diagonalisable,  $E$  est somme directe des espaces propres de  $u$ . Et on a vu à la propriété 8 que les espaces propres étaient deux à deux orthogonaux.

•  $(3) \Rightarrow (2)$ . Si  $E$  est somme directe orthogonale d'espaces propres de  $u$ , alors une base orthonormale adaptée à cette somme directe est une base orthonormale de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ .

•  $(2) \Rightarrow (1)$ . Il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale, donc symétrique. Par propriété,  $u$  est autoadjoint.

### Caractérisation spectrale – propriété 9

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $u$  (par le théorème spectral), et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres associées.



Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . On a

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i \quad \langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

- Supposons que  $u \in \mathcal{S}^+(E)$ .

En prenant  $x = e_j$  dans ce qui précède, on trouve  $\lambda_j = \langle u(e_j), e_j \rangle \geq 0$ .

Et si  $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ , puisque  $e_j \neq 0$ , on trouve  $\lambda_j > 0$ .

- Réciproquement, supposons que  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ .

Comme somme de positifs,  $\langle u(x), x \rangle \geq 0$  et il a égalité si et seulement si,  $\forall i, \lambda_i x_i^2 = 0$ .

Si  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$ , on a donc bien aussi :  $\langle u(x), x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ .

### Définition-propriété 5

- (1)  $\Rightarrow$  (2)

On suppose que  $u$  conserve la norme. Par formule de polarisation :

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|u(x + y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

- (2)  $\Rightarrow$  (1) (facultatif)

On suppose que  $u$  conserve le produit scalaire. Alors  $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$  et par positivité de la norme,  $\|u(x)\| = \|x\|$ .

- (2)  $\Rightarrow$  (3)

Supposons que  $u$  conserve le produit scalaire. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

$\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ . Donc  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une famille orthonormée de  $E$ . On termine comme d'habitude pour *base*.

- (3)  $\Rightarrow$  (1)

Supposons que  $u$  conserve les bases orthonormées de  $E$ .

Soit  $x \in E$ . Si  $x = 0$ ,  $\|u(x)\| = \|u(0)\| = 0 = \|0\| = \|x\|$ .

Si  $x \neq 0$ ,  $\frac{x}{\|x\|}$  est de norme 1, et peut être complété en  $\mathcal{B}$  base orthonormée de  $E$ .

Par hypothèse,  $u(\mathcal{B})$  est une base orthonormée, donc en particulier,  $u(\frac{x}{\|x\|})$  est de norme 1.

Donc  $\|\frac{1}{\|x\|} u(x)\| = 1$  puis  $\|u(x)\| = \|x\|$ .

### Propriété 10

- Montrons que  $O(E) \subset GL(E)$ .

Soit  $u$  une isométrie vectorielle et  $x \in \ker u$ . On a  $\|x\| = \|u(x)\| = \|0\| = 0$ . Donc  $x = 0$ .  $u$  est donc injectif. S'agissant d'un endomorphisme de  $E$  de dimension finie,  $u$  est bijectif.

- $\text{Id}_E$  conserve la norme,  $\text{Id}_E \in O(E)$ .
- Soient  $u$  et  $w$  dans  $O(E)$ . Montrons que  $u \circ w^{-1} \in O(E)$ . Soit  $x \in E$ .

$$\|u(w^{-1}(x))\|_{u \text{ isométrie}} = \|w^{-1}(x)\|_{w \text{ isométrie}} = \|w(w^{-1}(x))\| = \|x\|$$

### Propriété 11

- On suppose que  $u$  est une isométrie. On a vu à la propriété 10 que  $u$  était bijectif. Pour  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u \circ u^{-1}(y) \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$$

donc  $u^* = u^{-1}$ .

- On suppose que  $u$  est bijectif et que  $u^* = u^{-1}$ .

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle = \langle x, x \rangle$$

### Propriété 12

On note  $M$  la matrice de  $u$  dans une base orthonormée.

Par la propriété précédente,  $u$  est une isométrie si, et seulement si,  $u \circ u^* = \text{Id}$  si, et seulement si,  $MM^T = I_n$  si, et seulement si,  $M$  est une matrice orthogonale.

### Propriété 13

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice orthogonale. On a les équations  $\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \text{ (*)} \\ ad - bc = \pm 1 \end{cases}$ . On procède par astuce avec (\*), en

essayant de fournir une colinéarité sur un vecteur non nul :

$$\text{Par (*), } \begin{vmatrix} a & -d \\ c & b \end{vmatrix} = 0, \text{ avec } (a, c) \neq 0 \text{ puisque sa norme est } 1$$

Il existe un réel  $\alpha$  tel que  $\underbrace{\begin{pmatrix} -d \\ b \end{pmatrix}}_{\text{de norme } 1} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}}_{\text{de norme } 1}$ . Donc  $\alpha \in \{-1, 1\}$ .

PREMIER CAS :  $\alpha = 1$ .  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$  et  $\det(M) = -(a^2 + c^2) = -1$ .

La relation  $a^2 + c^2 = 1$  fournit  $a^2 \leq 1$ , puis  $-1 \leq a \leq 1$ , et l'existence de  $\theta$  réel tel que  $a = \cos \theta$ . On en déduit que  $c = \pm \sin \theta$ . Mais quitte à changer  $\theta$  en  $-\theta$ , il existe  $\theta$  réel tel que  $c = \sin \theta$ .

$M$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = S(\theta)$ .

DEUXIÈME CAS :  $\alpha = -1$ .  $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$  et  $\det(M) = a^2 + c^2 = 1$ . Par les mêmes calculs/raisonnements qu'au premier cas,  $\exists \theta \in \mathbb{R}$ ,  $a = \cos \theta$  et  $c = \sin \theta$ .  $M$  est de la forme  $R(\theta)$ .

### Propriété 14

Ce sont les formules trigonométriques et le calcul matriciel  $R(\theta)R(\theta')$  qui donnent la matrice  $R(\theta + \theta')$ . Soit

$$\psi : \begin{pmatrix} (\mathbb{U}, \times) & \longrightarrow & (\text{SO}_2(\mathbb{R}), \times) \\ z = e^{i\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -\text{Im}(z) \\ \text{Im}(z) & \text{Re}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- $\psi$  est bien définie.
- $\psi$  est un morphisme de groupes :

$$\psi(zz') = \psi(e^{i(\theta+\theta')}) = R(\theta + \theta') = R(\theta)R(\theta') = \psi(z)\psi(z')$$

- $\psi$  est surjective par la propriété précédente (prop. 14).
- $\psi(z) = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = 1$ . Donc  $\psi$  est injective.

### Propriété 15

- Soit  $u$  une isométrie positive.

Soit  $\mathcal{B}_0$  une base orthonormée directe de  $E$ . La matrice de  $u$  dans cette base est orthogonale positive, donc il existe  $\theta$  (unique modulo  $2\pi$ ) tel que  $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = R(\theta)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe de  $E$ , et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}_0$ . En tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées,  $P$  est une matrice orthogonale. Comme on passe d'une base directe à une base directe,  $\det(P) = 1$ , et  $P \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ .

Par formule de changement de bases,  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = P \times R(\theta) \times P^{-1}$ .

On a vu dans la propriété précédente (propriété 14) que  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  était un groupe commutatif. Donc ces trois matrices commutent, donc  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$ .

Remarque : dans une base orthonormée indirecte, on peut montrer que  $\text{mat}(u) = R(-\theta)$ .

- Soit  $u$  une isométrie négative. Par la propriété 13, il existe une base orthonormale de  $E$  dans laquelle  $\text{mat}(u) = S(\theta)$ . Comme  $[S(\theta)]^2 = I_2$ , on a  $\chi_u = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$  et  $\chi_u$  est scindé à racines simples, donc  $u$  est diagonalisable, de spectre  $\{-1, 1\}$ .

Pour  $x \in E_1$  et  $y \in E_{-1}$ , on a

$$\langle x, y \rangle = \langle u(x), -u(y) \rangle = -\langle x, y \rangle \text{ puis } \langle x, y \rangle = 0$$

Les espaces propres sont donc orthogonaux, et on peut considérer une base orthonormée  $(x_0, y_0)$  de  $E_1 \oplus E_{-1} = E$ ; dans cette base orthonormée, la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Et  $u$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Vect}(x_0)$ . C'est une réflexion car  $\dim \text{Vect}(x_0) = \dim E - 1$ .

### Lemme 1

Soit  $u \in \text{O}(E)$ , et  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ . Il existe  $x \neq 0$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . Comme  $u$  conserve la norme,  $\|\lambda x\| = \|x\|$ , puis  $|\lambda| \|x\| = \|x\|$ . Comme  $x \neq 0$ ,  $\|x\| \neq 0$ , et  $|\lambda| = 1$ .

$u$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel...  $\lambda \in \{-1, 1\}$ .

### Lemme 2

Soit  $F$  stable par l'isométrie vectorielle  $u$ . On a  $u(F) \subset F$ .

Avoir l'œil!  $u(F)$  et  $F$  sont de même dimension car  $u$  est bijectif. Donc  $u(F) = F$ . Cela va servir!

Soit  $x \in F^\perp$ . Soit  $y \in F$ . Par ce qui précède, il existe  $t \in F$  tel que  $y = u(t)$ .

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(t) \rangle = \langle x, t \rangle = 0.$$

$F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

### Théorème 3

Soit  $\mathcal{P}_n$  : « pour toute isométrie d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ , il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme  $(1)$ ,  $(-1)$ ,  $R(\theta)$  avec  $\theta \notin \{0, \pi\}$  ».

On montre cette propriété par récurrence forte pour  $n \geq 1$ .

•  $\mathcal{P}_1$  est vraie. Tout vecteur non nul est vecteur propre, et par le lemme 1, les valeurs propres possibles sont 1 et  $-1$ .

$\mathcal{P}_2$  est vraie (cf. réduction des isométries en dimension 2).

• Soit  $n \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$  sont vraies, et soit  $u$  isométrie d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n+1$ .

Par le lemme 4, il existe une droite ou un plan stable par  $u$ .

— S'il existe une droite  $D = \text{Vect}(e)$  stable par  $u$ , alors d'une part,  $e$  est vecteur propre de  $u$  associé, par le lemme 1, à la valeur propre 1 ou  $-1$ . D'autre part, par le lemme 2,  $D^\perp$  est stable par  $u$ .  $u_{D^\perp}$  est encore une isométrie (la propriété de conservation de la norme reste vraie par restriction), en dimension  $n$ . Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $D^\perp$  dans laquelle la matrice de  $u_{D^\perp}$  est diagonale par blocs avec des blocs comme annoncé. Soit  $\mathcal{B}'$  la concaténation de  $(e)$  et  $\mathcal{B}$ . C'est une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme voulue.

— Sinon, il existe  $P$  plan stable par  $u$ .

$u_P$  est une isométrie en dimension 2, et il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}_1$  dans laquelle  $\text{mat}(u_P)$  est de la forme  $R(\theta)$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Remarque : c'est forcément  $R(\theta)$  puisqu'on s'est ici placé dans le cas où  $u$  n'admettait pas de droite stable.)

Et par le lemme 2,  $P^\perp$  est stable par  $u$ .  $u_{P^\perp}$  est encore une isométrie, en dimension  $n-1$ . Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}_2$  de  $P^\perp$  dans laquelle la matrice de  $u_{P^\perp}$  est diagonale par blocs avec des blocs comme annoncé.

Soit  $\mathcal{B}'$  la concaténation de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . C'est une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme voulue.

## Pour moi : classification des isométries en dimension 3, en fonction des éléments propres

isométrie	déterminant	spectre	matrice dans une certaine base orthonormée
identité (rotation d'angle 0)	1	$\{1\}$	$I_2$
rotation d'angle $\pi$ (demi-tour)	1	$\{1, -1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
rotation d'angle $\theta \notin \{0, \pi\}$	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
$-\text{Id}$	-1	$\{-1\}$	$-I_2$
réflexion	-1	$\{1, -1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
composée rotation-réflexion	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

### Propriété 16

Soit  $p$  un projecteur de  $E$  espace vectoriel euclidien.

- Supposons que  $p$  soit un projecteur orthogonal. Soit  $(x, y) \in E^2$ .

$$\begin{aligned}
 \langle p(x)|y \rangle &= \langle p(x)|p(y) + y - p(y) \rangle \\
 &= \langle p(x)|p(y) \rangle + \langle p(x)|y - p(y) \rangle \\
 &= \langle p(x)|p(y) \rangle + 0 \quad \text{car } p(x) \in F \text{ et } y - p(y) \in F^\perp \\
 &= \langle p(x)|p(y) \rangle
 \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de  $x$  et  $y$ , on a aussi :  $\langle p(y)|x \rangle = \langle p(y)|p(x) \rangle = \langle p(x)|p(y) \rangle$ .

Et par symétrie du produit scalaire :  $\langle x|p(y) \rangle = \langle p(x)|p(y) \rangle$ , et finalement,  $\langle p(x)|y \rangle = \langle x|p(y) \rangle$ .

- Supposons que  $p^* = p$  (on dit que  $p$  est autoadjoint).

$p$  est un projecteur ; c'est la projection sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\ker p$ . On voudrait donc montrer que  $\ker p = (\text{Im } p)^\perp$ .

Soient  $x \in \ker p$  et  $y \in \text{Im } p$ . Il existe  $t \in E$  tel que  $y = p(t)$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \langle x|y \rangle &= \langle x|p(t) \rangle \\
 &= \langle p(x)|t \rangle \quad \text{car } p^* = p \\
 &= \langle 0|t \rangle = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi  $\ker p \subset (\text{Im } p)^\perp$ . Par le théorème du rang et propriété de l'orthogonal, nous avons :

$$\dim \ker p = \dim E - \dim \text{Im } p = \dim (\text{Im } p)^\perp$$

et finalement,  $\ker p = (\text{Im } p)^\perp$ .  $p$  est la projection sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $(\text{Im } p)^\perp$ .