Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Les attentes

1. Savoir présenter le schéma dans $\mathbb{C}$ donnant les situations :
   - en termes de série convergente,
   - en termes de suite bornée.

   Et savoir aussi définir rigoureusement le rayon R de convergence (sup ...).
2. Règle de d'Alembert pour les séries entières. Savoir que pour des séries lacunaires, il faut revenir à la règle de d'Alembert des séries numériques.
3. Théorèmes d'équivalence, négligeabilité, domination à partir des coefficients.
4. Série entière de référence de type $\sum n^a z^n$.
5. Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.
6. Propriété pour la somme. Propriété du produit de Cauchy.
7. Où y a-t-il convergence normale de $\sum a_n z^n$? Continuité sur $D(0, R)$.
8. La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.
9. Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Corollaire : si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha[$ non vide, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
10. Développements en série entière usuels : e^z, $\frac{1}{1-z}$, $-\ln(1-x)$, $(1+x)^\alpha$, cos, sin, ch, sh et domaines de validité.
11. Savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

1. Lemme d'Abel.
2. Théorème d'Abel radial.
3. Savoir retrouver efficacement le développement en série entière de arctan.

On souhaite étudier les fonctions de la forme

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{ou} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où les coefficients a_n sont réels ou complexes, la variable étant elle aussi réelle ou complexe.

1 Généralités

Soit $q \in]-1,1[$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} nq^n = 0$ et plus généralement, pour tout réel α,

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha q^n = 0$$

1.1 rayon de convergence

Définition 1

On appelle *série entière* toute série de fonctions de la variable complexe ou réelle de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Le domaine de convergence est l'ensemble de définition, dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, de la fonction
$z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Lemme 1 – lemme d'Abel

Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

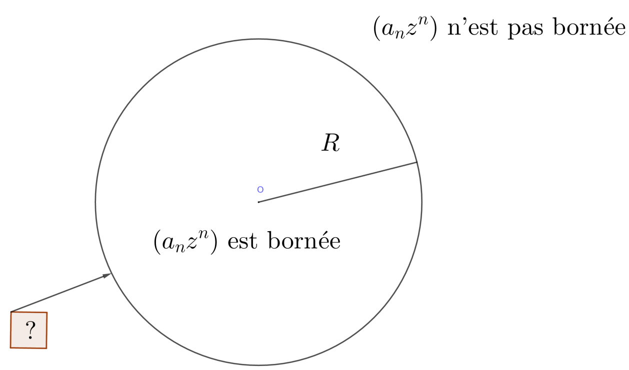
Définition 2

On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure :

$$R = \sup\{\, t \in \mathbb{R}^+ \mid \text{la suite } (a_n t^n) \text{ est bornée}\}$$

On a $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

En vertu du lemme d'Abel, si la suite $(a_n t^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant t$, la suite $(a_n z^n)$ est encore bornée. On a donc la configuration suivante :



Exercice 1 :

1. Donner le rayon de convergence de $\sum z^n$, $\sum \dfrac{z^n}{n}$, de $\sum n! z^n$.
2. Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ lorsque la suite (a_n) est bornée ?

Propriété 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$, on ne peut rien dire.

Corollaire 1

Avec les mêmes notations,

- si $\sum |a_n z^n|$ converge, alors $R \geqslant |z|$,
- si $\sum |a_n z^n|$ diverge, alors $R \leqslant |z|$.

$$R = \sup\{\, t \in \mathbb{R}^+,\ \sum a_n t^n \text{ converge absolument}\}$$

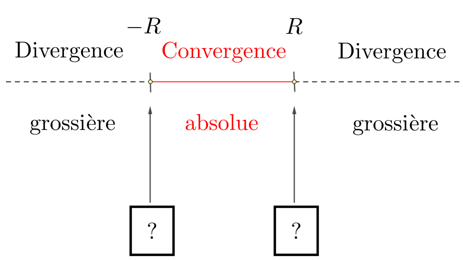
Exemple : notons R le rayon de convergence de $\sum \sin(n) z^n$.

$(\sin(n))$ est bornée donc

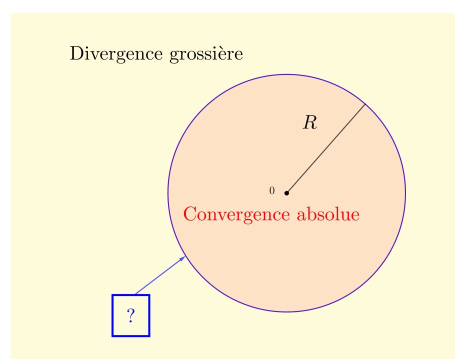
$\sum \sin(n)$ diverge grossièrement donc

donc

Dans $\mathbb{R}$



Dans $\mathbb{C}$



Dans le cas réel, le domaine de convergence est un intervalle du type $]-R, R[$, $]-R, R]$, $[-R, R[$ ou $[-R, R]$.

Dans le cas complexe, le domaine de convergence est constitué du disque ouvert de convergence et de points situés sur le cercle d'incertitude.

Définition 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $]-R, R[$ est appelé *intervalle ouvert de convergence.*
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé *disque ouvert de convergence.*

1.2 détermination pratique du rayon de convergence

Nous présentons quelques pistes :

- utilisation de séries $\sum a_n z_0^n$ connues, pour encadrer R
- utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries entières
- utilisation de comparaisons ($a_n \sim b_n$, $a_n = O(b_n)$)
- utilisation de séries dérivées.

Méthode – utilisation de séries $\sum a_n z_0^n$ connues

Si on connaît la nature de $\sum a_n z_0^n$, on peut en déduire des informations sur le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$, en réfléchissant bien sur le schéma page 3.

— Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0| \leqslant R$.

— Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $|z_0| \geqslant R$.

— Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $|z_0| = R$.

Exercice 2 : On a déjà mis en œuvre cette idée plus haut pour $\sum \sin(n) z^n$. Traiter les exemples de $\sum \dfrac{z^n}{n}$ et $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$.

Propriété 2 – règle de d'Alembert adaptée aux séries entières

On suppose que les coefficients a_n sont non nuls à partir d'un certain rang et que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

— Si $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, $R = \frac{1}{\ell}$.

— Si $\ell = 0$, $R = +\infty$.

— Si $\ell = +\infty$, alors $R = 0$.

Exercice 3 : Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum (n-1)2^n z^n \qquad \sum \frac{1}{(2n)!} z^n \qquad \sum \arctan(n) z^n \qquad \sum \arctan\left(\frac{1}{n}\right) z^n$$

✎♡ Exercice 4 : Déterminer le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$ pour α réel fixé. Vous pourrez utiliser ce résultat comme du cours.

Exercice 5 : Séries lacunaires. La série de fonctions $\sum a_n z^{2n}$ peut se comprendre comme une série entière. En effet, $\sum a_n z^{2n} = \sum b_n z^n$ en posant $b_{2p} = a_p$ et $b_{2p+1} = 0$. Le rayon de convergence d'une telle série peut souvent se déterminer par la règle de d'Alembert des séries numériques (pas des séries entières puisque les a_n s'annulent une infinité de fois).

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière lacunaire $\sum \binom{2n}{n} z^{3n}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière lacunaire $\sum \frac{1}{2^n} z^{n^2}$.

Propriété 3 – comparaison de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Propriété 4 – séries entières dérivées

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

1.3 opérations algébriques sur les séries entières

Propriété 5

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Soit R le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$. On a

$$R \geqslant \min(R_a, R_b)$$

et si $R_a \neq R_b$, on a $R = \min(R_a, R_b)$.

Définition 4

Le *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Propriété 6

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Soit R le rayon de convergence du produit de Cauchy de ces séries.
On a $\quad R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et

$$\text{pour } |z| < \min(R_a, R_b) \leqslant R, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right)$$

où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ i+j=n} a_i b_j$.

Exercice 6 : On pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Appliquer la propriété du produit de Cauchy pour transformer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$.

2 Régularité de la somme d'une série entière

Nous abordons ici l'étude des fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la variable réelle, et $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de la variable complexe. Nous avons déjà parlé du domaine de définition en page 3.

Exercice 7 : Donner le domaine de définition réel de la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

2.1 continuité

Propriété 7

Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

On ne peut pas dire plus : on ne peut pas affirmer qu'une série entière converge normalement sur le disque ouvert de convergence.

Corollaire 2

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.

Par exemple, $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est continue sur et $\exp : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est continue sur

Exercice 8 : Le chapitre Séries de fonctions n'est pas à jeter à la poubelle... Que dire de la continuité de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$?

Jusqu'à la fin de la section, on s'intéresse à des séries entières de la variable réelle.

L'intervalle ouvert de convergence de la série entière est $]-R, R[$. La propriété précédente nous dit que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$. Par convergence normale du chapitre Séries de fonctions, on peut parfois obtenir la convergence normale sur $[-R, R]$ et la continuité sur $[-R, R]$.
Par exemple, si la série $\sum a_n R^n$ converge absolument, les inégalités

$$\forall x \in [-R, R], \quad |a_n x^n| \leqslant |a_n| R^n \text{ puis } \sup_{x \in [-R,R]} |a_n x^n| \leqslant |a_n R^n|$$

assurent la convergence normale sur $[-R, R]$. Dans ce cas, la somme est continue sur $[-R, R]$.
Le théorème suivant s'intéresse au cas de semi-convergence ($\sum a_n R^n$ converge) et montre la continuité en R. Il est admis, conformément au programme.

Théorème 1 – théorème d'Abel radial - admis

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence R. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

De même, si $\sum a_n(-R)^n$ converge, on admet que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to -R]{} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$. On en déduit que la somme d'une série entière de la variable réelle est en réalité continue sur l'intervalle de convergence entier, pas seulement l'intervalle ouvert de convergence.

⚠ Le fait que la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R ait une limite en R n'implique pas que $\sum a_n R^n$ converge. Par exemple, la série entière $\sum (-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et pour somme $\frac{1}{1+x}$. De plus, $\frac{1}{1+x}$ admet bien une limite en 1. Mais pourtant $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement.

2.2 dérivation terme à terme, intégration

Théorème 2

La fonction somme d'une série entière de la variable réelle, $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.
Les dérivées d'ordre p de f s'obtiennent en dérivant terme à terme. Pour $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ \text{pour } p \in \mathbb{N},\ f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} \end{aligned}$$

En particulier, $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

Exercice 9 : Utiliser ce théorème sur la série entière géométrique $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Propriété 8

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R. On peut intégrer terme à terme de 0 à t, pour $t \in]-R, R[$:

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

Exercice 10 :

1. Appliquer le théorème d'intégration sur la série entière $\sum x^n$. Quelle formule obtient-on ?
2. Quelle formule obtient-on après application du théorème d'Abel radial en -1 ?

3 Développements en séries entières

3.1 généralités (variable complexe)

Définition 5

- Une fonction f de la variable réelle est *développable en série entière* sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R avec $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- Une fonction f de la variable complexe est *développable en série entière* sur $D(0,r)$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R avec $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall z \in D(0,r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Remarque : une combinaison linéaire et un produit de fonctions développables en séries entières sont encore développables en séries entières.

Exemples :

— la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ puisque

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

— la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $D(0,1)$ puisque

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

— toute fonction polynomiale est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ puisque

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad \text{par la formule de Taylor sur les polynômes}$$

Si f admet un développement en série entière, ce développement est unique, en vertu de la propriété suivante.

Propriété 9 – unicité du développement en série entière

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence strictement positifs. On suppose que ces séries entières coïncident sur un intervalle $]0,r[$ non vide :

$$\forall x \in]0,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Exercice 11 : Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur $]-r,r[$. Que peut-on dire lorsque f est paire ? impaire ?

3.2 développements usuels dans le domaine réel

Désormais, nous considérons uniquement des fonctions de la variable réelle. D'après les paragraphes précédents,

> Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et son développement en série entière est unique, correspondant à sa série de Taylor en 0.
>
> $$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
>
> La réciproque est fausse : f peut être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ sans que f soit développable en série entière, et la série de Taylor de f en 0 peut converger sans que sa somme soit égale à f.

Voici la liste des développements en série entière à connaître par cœur.

$R=+\infty$	$z\in\mathbb{C}$	$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$
$R=1$	$z\in D(0,1)$	$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$
$R=+\infty$	$x\in\mathbb{R}$	$\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$
$R=+\infty$	$x\in\mathbb{R}$	$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$R=+\infty$	$x\in\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$
$R=+\infty$	$x\in\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$R=1$	$x\in]-1,1]$	$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$
	$x\in[-1,1[$	$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$
$R=1$	$x\in[-1,1]$	$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$
$R=1$ si $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	$x\in]-1,1[$	$(1+x)^a=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n$

Exercice 12 : Appliquer le développement en série entière $(1+x)^\alpha$ pour développer en série entière :

1. $\dfrac{1}{(1+x)^{p+1}}$ où $p \in \mathbb{N}$. Quel résultat montré plus haut retrouve-t-on ?
2. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3.3 méthode de l'équation différentielle linéaire

Commençons par un exemple et cherchons à nouveau le développement en série entière de sinus, mais par une autre méthode. La fonction sinus est solution de l'équation différentielle $y'' = -y$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

$$\begin{cases} y'' &= -y \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Par analyse-synthèse, montrons que sin est développable en série entière et déterminons son développement.

Analyse : on suppose l'existence d'une série entière solution de $(*)$ et on la détermine.
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de $(*)$. On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Par théorème de dérivation terme à terme, $S''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. On reporte dans $(*)$. Pour $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)(j+2)a_{j+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{k=0}^{+\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k]x^k &= 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} 0x^k \end{aligned}$$

Deux séries entières qui coïncident sur un intervalle non vide $]0, r[$ ont les mêmes coefficients. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$$

Or $a_0 = S(0) = 0$, donc pour tout k pair, $a_k = 0$ (récurrence immédiate). Et $a_1 = S'(0) = 1$.

$$a_3 = -\frac{1}{3 \times 2} \quad a_5 = \frac{(-1)^2}{5.4.3.2} \quad \text{et par récurrence, } a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

Synthèse
Considérons la série entière $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$. Commençons par chercher son rayon de convergence.
Pour $u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $|\frac{u_{k+1}}{u_k}| = \frac{|x^2|}{(2k+3)(2k+2)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. Par la règle de d'Alembert (sur les séries numériques en général, pas celle sur les séries entières), $\sum u_k$ converge absolument. $R = +\infty$. On note $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

Les calculs de l'analyse faite plus haut peuvent être repris sur $\mathbb{R}$ et permettent d'affirmer que la fonction

somme f est solution de l'équation différentielle $y'' = -y$. De plus, $f(0) = 0$. Et $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} x^{2k+1}$ donc $f'(0) = 1$.
Par unicité des solutions au problème de Cauchy $(*)$, $f = \sin$.
On a donc redémontré ici :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Méthode – déterminer un développement en série entière avec une équation différentielle

1. On détermine une équation différentielle satisfaite par notre fonction f, avec conditions initiales.
2. Par analyse-synthèse, on détermine une série entière S solution du problème. On est amené dans notre travail à une relation de récurrence entre les coefficients.
3. On utilise un résultat d'unicité des solutions à un problème de Cauchy. On obtient $f = S$.

Exercice 13 : Soit $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. f est définie sur $]-1, 1[$.

1. Déterminer l'équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par f.
2. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et déterminer son développement en série entière.

4 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Lemme d'Abel (lemme 1)

Si $z_0 = 0$, il n'y a rien à montrer. Soit $z_0 \neq 0$ tel que $(a_n z_0^n)$ est bornée. Soit z tel que $|z| < |z_0|$.

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = O(|\frac{z}{z_0}|^n)$$

La série géométrique $\sum |\frac{z}{z_0}|^n$ est de raison $r \in]-1,1[$ donc converge, et $|\frac{z}{z_0}|^n \geqslant 0$. Par le théorème de comparaison des séries numériques à termes positifs, $\sum |a_n z^n|$ converge.

Propriété 1 et corollaire 1

Si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, donc ne tend pas vers 0, donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Si $|z| < R$, alors par définition du sup, $|z|$ n'est pas un majorant de $\{t \in \mathbb{R}^+,\ (a_n t^n) \text{ est bornée}\}$ et il existe r tel que $|z| < r \leqslant R$, pour lequel la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Par le lemme d'Abel, la série $\sum |a_n z^n|$ converge.

Corollaire immédiat en utilisant les contraposées de la propriété 1 :

$$\sum |a_n z^n| \text{ diverge } \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ ne converge pas absolument } \Rightarrow |z| \geqslant R$$

$$\sum |a_n z^n| \text{ converge } \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ ne diverge pas grossièrement } \Rightarrow |z| \leqslant R$$

Règle de d'Alembert pour les séries entières, propriété 2

On suppose que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

— Si $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, montrons que $R = \frac{1}{\ell}$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z|\ell$.
Si $|z| > \frac{1}{\ell}$, par la règle de d'Alembert des séries, $\sum a_n z^n$ diverge. Donc $R \leqslant \frac{1}{\ell}$.
Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, par la règle de d'Alembert des séries, $\sum a_n z^n$ converge, et donc $R \geqslant \frac{1}{\ell}$.

— Si $\ell = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = 0$, et par la règle de d'Alembert des séries, $\sum a_n z^n$ converge. Donc $R = +\infty$.

— Si $\ell = +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = +\infty$, et toujours par la règle de d'Alembert des séries, $\sum a_n z^n$ diverge. $R = 0$.

Propriété 3

- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors pour $t \in \mathbb{R}^+$, $|a_n t^n| \leqslant |b_n t^n|$.
  Donc si la suite $(b_n t^n)$ est bornée, la suite $(a_n t^n)$ l'est aussi.

  $$\{t \in \mathbb{R}^+,\ (b_n t^n) \text{ est bornée}\} \subset \{t \in \mathbb{R}^+,\ (a_n t^n) \text{ est bornée}\}$$

  $R_b \leqslant R_a$.
- Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors on a $|a_n| \leqslant M|b_n|$ à partir d'un certain rang, et on peut rédiger comme au premier point. $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$.

Propriété 4

On pose $b_n = n a_n$.
• $|a_n| \leqslant |b_n|$ donc $R_b \leqslant R_a$.
• Soit $t < R_a$ (si $R_a = 0$, on a $R_b = R_a = 0$ et c'est déjà fini). On veut montrer que $(n a_n t^n)$ est bornée.
Il existe r dans $]t, R_a[$.

$$|b_n t^n| = |n a_n t^n| = \underbrace{a_n r^n}_{\text{bornée}} \times \underbrace{n(\frac{t}{r})^n}_{\text{tend vers 0 par croissance comparée}}$$

Donc $(b_n t^n)$ est bornée et $t \leqslant R_b$.
$R_a \leqslant R_b$

Propriété 5

Remarque : rédiger sur les convergences de séries pourrait leur permettre de réviser.
• Soit $t < \min(R_a, R_b)$. Les suites $(a_n t^n)$ et $(b_n t^n)$ sont bornées, donc $= (a_n t^n + b_n t^n) = ((a_n + b_n)t^n)$ est aussi bornée. Donc $t < R$. On fait tendre t vers $\min(R_a, R_b)$ et on trouve $\min(R_a, R_b) \leqslant R$.

- On suppose que $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$. Par le premier point, $R_a \leqslant R$.

Soit $t \in]R_a, R_b[$. La suite $(a_n t^n)$ n'est pas bornée et la suite $(b_n t^n)$ l'est. Par somme, la suite $((a_n + b_n)t^n)$ n'est pas bornée. Donc $t \geqslant R$. On fait ensuite tendre t vers R_a.

Propriété 6 sur le produit de Cauchy

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument. On a

$$c_n z^n = \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k})$$

Par propriété de Cauchy du chapitre Séries numériques, $\sum c_n z^n$ converge et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right)$$

et donc $|z| \leqslant R$. On fait tendre z vers $\min(R_a, R_b)$.

Propriété 7 et corollaire 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $D_f(0,r) = B_f(0,r)$, où $0 \leqslant r < R$, un disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence.

On note $f_n(z) = a_n z^n$. Pour $z \in D_f(0,r)$, on a $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$ puis $\|f_n\|_{\infty,\, D_f(0,r)} \leqslant |a_n| r^n$.

Comme $r < R$, $\sum |a_n r^n|$ converge. Par théorème de comparaison, $\sum \|f_n\|_{\infty,\, D_f(0,r)}$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $D_f(0,r)$.

On donne comme exemple $\sum z^n$, pour illustrer qu'on n'a pas forcément convergence normale sur tout le disque ouvert de convergence ($\sup\limits_{z \in D(0,1)} |z^n| = 1$ et $\sup\limits_{x \in]-1,1[} |x^n| = 1$, et $\sum 1$ diverge).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $D_f(0,r)$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $D_f(0,r)$. Donc la somme $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $D_f(0,r)$. Elle est donc continue en tout point de $D_f(0,r)$, et ce quel que soit $r < R$, donc elle est continue en tout point du disque ouvert de convergence.

Théorème 2

On a déjà montré, et ce résultat était valable aussi pour des séries entières de la variable complexe, qu'une série entière et sa série entière dérivée avaient même rayon de convergence.

Remarque : On considère une série entière de la variable réelle parce que la notion de dérivabilité avec une variable complexe n'est pas au programme.

Soit donc $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R.

- Nous mettons en place le théorème de dérivation des séries de fonctions. Soit $f_n : x \mapsto a_n x^n$. On vérifie les trois points :
  - f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$,
  - $\sum f_n$ converge simplement sur $]-R, R[$,
  - $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence R (vu en propriété 4). Donc $\sum f_n'$ converge uniformément (car normalement) sur tout segment $[-r, r]$ de $]-R, R[$ par la propriété 7.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$, et $f'(x)$ est obtenue par dérivation terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

- Par récurrence immédiate, on a le résultat pour $f^{(p)}$.

Propriété 8

Nous mettons en place le théorème d'intégration des séries de fonctions.

Soit $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Les fonctions f_n sont continues sur $]-R, R[$ et $\sum f_n$ converge uniformément (car normalement) sur tout segment $[-t, t]$ de $]-R, R[$ par la propriété 7. Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t a_n x^n\,\mathrm{d}x$$

puis le résultat.

Propriété 9

On note R_a et R_b les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On a $r \leqslant \min(R_a, R_b)$.

Pour tout $t \in]-R_a, R_a[$, on note $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et pour $t \in]-R_b, R_b[$, $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$.

Par hypothèse, $f(t) = g(t)$ pour $t \in]0, r[$. Par continuité de la somme de séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence, f et g sont continues en 0 :

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} g(t) = g(0)$$

f et g coïncident sur $[0, r[$.

Par propriété des séries entières, la fonction somme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_a, R_a[$, et g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_b, R_b[$.

Pour tout $t \in [0, r[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(t) = g^{(n)}(t)$.

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n$ par le théorème 2.

Établissement des développements en série entière usuels

- **exponentielle complexe**

On montre facilement que pour $z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge.

On rappelle l'énoncé de l'inégalité de Taylor-Lagrange. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour a et b dans I, en travaillant dans $[0, +\infty]$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \|f^{(n+1)}\|_{\infty, I} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

On prend $I = [0, 1]$, $a = 0$, $b = 1$, z fixé dans $\mathbb{C}$ et $f(t) = e^{tz}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $f^{(n+1)}(t) = z^{n+1} e^{tz}$.

Pour tout $t \in I$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant |z|^{n+1} |e^{tz}| \leqslant |z|^{n+1} M_z$ où $M_z = \sup\limits_{t \in [0,1]} |e^{tz}|$. $M_z \in \mathbb{R}$ par le théorème des bornes atteintes (appliqué à la fonction $t \mapsto |e^{tz}|$ continue sur le segment $[0, 1]$).

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} |z|^{n+1} M_z$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)!} |z|^{n+1} M_z = 0$. On termine avec le théorème d'encadrement.

- **série géométrique complexe**

Pour $\sum z^n$, on détermine le rayon de convergence avec la règle de d'Alembert : $R = 1$. Pour $|z| < 1$,

$$\left| \frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}$$

et on termine avec le théorème d'encadrement.

- **fonctions circulaires**

On part de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{\mathrm{i}x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{k!} x^k$$

et on identifie la partie réelle et la partie imaginaire.

- **fonctions hyperboliques**

On part de $\begin{cases} e^x &= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \\ e^{-x} &= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \end{cases}$ et $L_1 + L_2$ et $L_1 - L_2$ donnent les résultats.

- **logarithme** $\ln(1+x)$

On part de $\sum (-x)^n$ de rayon de convergence $R = 1$, avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\int_0^t \frac{1}{1+x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t (-x)^n \, \mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$$

En conclusion, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

Regardons la convergence en $R = 1$. La suite $(\frac{1}{n})$ est décroissante de limite nulle. Par le théorème des séries alternées,

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. On peut alors appliquer le théorème d'Abel radial :

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}_{=\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Par unicité de la limite, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

- **Arctan**

Pour $x \in]-1,1[$, $x^2 \in]0,1[$ et on a

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Par le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad \arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$$

Par ailleurs, par le théorème des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge. On peut alors appliquer le théorème d'Abel radial :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n}_{=\arctan(x)} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Par unicité de la limite, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

- **série de type binôme**

On considère $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n$.

Si $a \in \mathbb{N}$, les termes $\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$ sont tous nuls à partir du rang $n = a+1$ et la série n'est qu'une somme finie, qu'on reconnaît comme étant la formule du binôme :

$$\text{pour } a \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^a = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k$$

Si $a \notin \mathbb{N}$, on peut appliquer la règle de d'Alembert : $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{a-n}{n+1}| \to 1$ et $R = 1$. Notons S la fonction somme :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \underbrace{1}_{a_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}}_{a_n} x^n$$

Par ailleurs, posons $f : x \mapsto (1+x)^a$; f est définie sur $]-1,1[$ et satisfait :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)f'(x) = af(x) \qquad \text{et } f(0) = 1 \qquad (*)$$

Donc f est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec condition initiale : $\begin{cases} (1+x)y' & = ay \\ y(0) & = 1 \end{cases}$. Par unicité au problème de Cauchy, f est caractérisée par $(*)$. Si on montre que S est solution de $(*)$, alors on aura bien $f = S$.

On a $S(0) = 1$. Par le théorème de dérivation terme à terme,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} n x^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} n x^{n} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-j)}{j!} x^{j} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} n x^{n} \\
&= a + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{a(a-1)\dots(a-k)}{k!} + \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)k}{k!} \right) x^{k} \\
&= a + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} (a-k+k) x^{k} \\
&= a + a\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^{k} \\
&= aS(x)
\end{aligned}$$