Suites et séries de fonctions

Les attentes

1. Suites de fonctions numériques. Savoir définir la convergence simple et la convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Savoir énoncer les propriétés : Théorème de continuité. Théorème de double limite. Théorème d'interversion limite - intégrale sur un segment. Théorème d'interversion limite - dérivation.

2. Séries de fonctions numériques. Savoir définir la convergence simple, la convergence uniforme, la convergence normale.
   — Une série de fonctions converge uniformément si, et seulement si, elle converge simplement et ses restes convergent uniformément vers 0.
   — La convergence normale implique la convergence uniforme : c'est pratique !
   — Adaptation des théorèmes : continuité, double limite, intégration terme à terme, dérivation terme à terme (et extension pour la classe $\mathcal{C}^p$).
   — Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.

1. Suites et séries de fonctions vectorielles à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Savoir définir la convergence simple, la convergence uniforme, et pour les séries, la convergence simple, la convergence absolue, la convergence uniforme, la convergence normale. Connaître les implications entre les notions.

2. Approximation uniforme :
   — par des fonctions vectorielles en escalier, pour une fonction continue par morceaux sur un segment,
   — par des fonctions polynomiales, pour une fonction continue sur un segment (théorème de Weierstrass).

Dans tout le chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On rappelle que pour f fonction bornée sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$. Quand il y a ambiguité possible, on précise : $\|f\|_{\infty, I} = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$.

1 Suites de fonctions

1.1 modes de convergence

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 1 – convergence simple

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement* sur I vers la fonction f sur I si

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Il s'agit de calculer une limite en tout point x. On parle pour cette raison de convergence ponctuelle. La limite f ainsi obtenue est appelée *limite simple*. Exercice 1 :

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) où $f_n(t) = t^n$ pour $t \in [0,1]$.
2. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) où $f_n(t) = (1+\frac{t}{n})^n$ pour t réel.
3. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) où $f_n(t) = \arctan(nt)$ pour t réel.
4. La continuité est-elle conservée par convergence simple ?

Définition 2 – convergence uniforme

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément* sur I vers la fonction f sur I si à partir d'un certain rang, la fonction $f_n - f$ est bornée sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0 \qquad \text{soit encore} \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

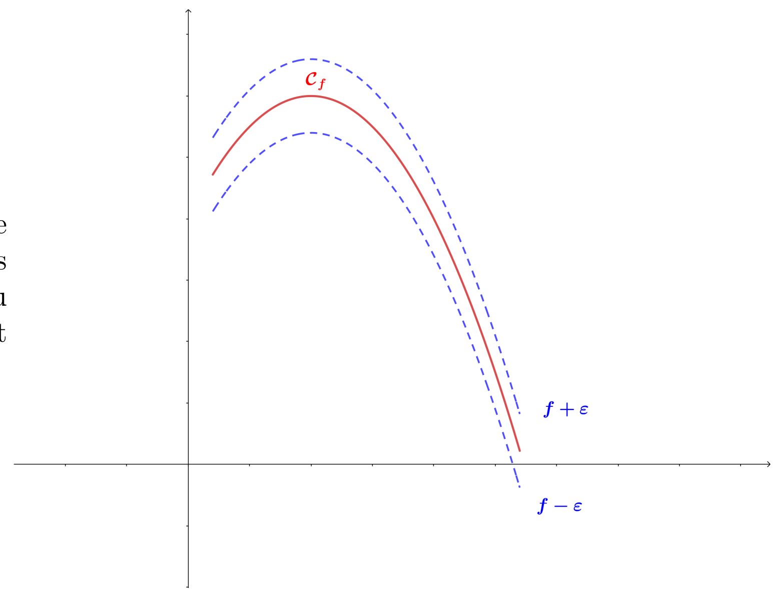
Avec des ε,

— la convergence simple de (f_n) vers f est :

— la convergence uniforme de (f_n) vers f est :

La limite f au sens de la convergence uniforme est appelée *limite uniforme*.

Graphiquement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les graphes des fonctions f_n sont dans la « bande » du plan comprise entre le graphe de $f - \varepsilon$ et le graphe de $f + \varepsilon$.



Théorème 1

La convergence uniforme entraîne la convergence simple : si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I.
La réciproque est fausse.

Il s'ensuit que la limite uniforme d'une suite de fonctions, si elle existe, est unique, définie pour $x \in I$ par : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Méthode – Montrer une convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions dont on souhaite montrer qu'elle converge uniformément sur I.

1. On étudie d'abord la convergence simple. Cela se fait par calcul de limite, pour $x \in I$, de $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$. Ça nous donne $f(x)$.
2. Il s'agit ensuite de montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On peut y arriver :
   — en établissant le tableau de variations de la fonction $|f_n - f|$ et en calculant alors $\|f_n - f\|_\infty$
   — par théorème d'encadrement, si on a trouvé $\|f_n - f\|_\infty \leqslant a_n$ avec $\lim a_n = 0$.

Méthode – Montrer qu'une suite ne converge pas uniformément

Différentes méthodes permettent de justifier qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément. Par exemple :

— la non-convergence simple

— la contraposée des théorèmes de continuité et de double limite énoncés dans les paragraphes suivants

— un raisonnement par l'absurde et une absurdité avec l'existence d'une suite (u_n) telle que $|f_n(u_n) - f(u_n)|$ ne tend pas vers 0, puisque

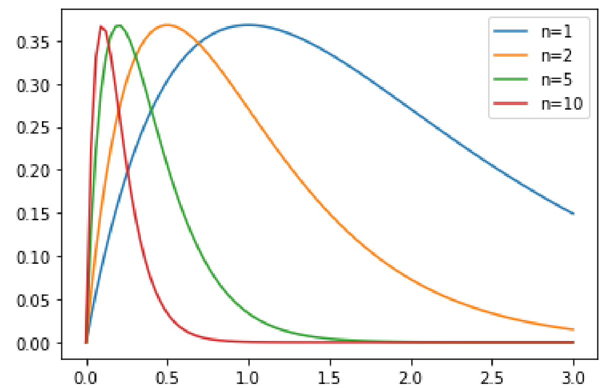
$$|f_n(u_n) - f(u_n)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$$

Exercice 2 :

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : t \mapsto t^2 e^{-nt}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : t \mapsto \frac{n+t^2}{n(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, n] \\ t - n & \text{si } t \in]n, n+1[\\ n + 2 - t & \text{si } t \in [n+1, n+2] \\ 0 & \text{si } t > n+2 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^+$

   (faire un graphe).
4. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : x \mapsto \sin(x + \frac{1}{n})$ sur $\mathbb{R}$.
5. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : x \mapsto \frac{x+\sqrt{n}}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 : Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : x \mapsto nxe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$. Étudier la convergence uniforme sur tout segment de $]0, +\infty[$.



Si une suite de fonctions converge uniformément sur J, elle converge uniformément sur toute partie de J. La réciproque est fausse et c'est une erreur fréquente de la croire vraie. La suite de fonctions (f_n) peut très bien converger uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ sans pour autant converger uniformément sur $\mathbb{R}$.

1.2 convergence uniforme, continuité et double limite

Propriété 1 – transmission de la continuité par convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

En pratique, on vérifie souvent la convergence uniforme sur des segments de I, ou sur des intervalles adaptés à la situation. Par exemple,

— si la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle $[a, b]$, avec $0 < a < b$, alors f est continue en tout point de ......
f est continue sur ......

— si la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle $[-a, a]$, avec $a > 0$, alors f est continue en tout point de ......
f est continue sur ......

— si la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle $[\frac{1}{a}, a]$, avec $a > 0$, alors f est continue en tout point de ......
f est continue sur ......

Propriété 2 – transmission de la continuité par convergence uniforme

Si la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, alors la fonction f est continue sur I.

Le théorème suivant est admis, conformément au programme.

Théorème 2 – théorème de la double limite

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors :

- ℓ_n admet une limite ℓ
- f admet une limite en a
- et ces deux limites sont égales, ce qui correspond à l'inversion de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

— Rappelons que a est situé dans l'adhérence de I si pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap I \neq \emptyset$, ou encore s'il existe une suite d'éléments de I convergeant vers a. Par exemple, 1 est adhérent à $[0, 1[$.

— Voici une illustration pour aider à retenir.

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, "\text{CVU / hypothèse}", "n\to+\infty"'] \arrow[d, "\substack{x \to a \\ \text{hypothèse}}"'] & f(x) \arrow[d, "\substack{x \to a \\ \text{THÉORÈME}}"] \\
\ell_n \arrow[r, "\text{THÉORÈME}", "n\to+\infty"'] & \ell
\end{tikzcd}$$

1.3 convergence uniforme et intégration sur un segment

Théorème 3 – interversion limite - intégrale sur un SEGMENT

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$. On a l'interversion limite - intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4 : En utilisant le théorème précédent, montrer que la suite de fonctions (f_n) suivante ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

$$f_n(x) = n^2(1 - x)x^n$$

Théorème 4 – interversion limite - primitive

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément vers f sur tout segment de I. Soit $a \in I$. On note F_n et F les primitives respectives de f_n et f sur I s'annulant en a :

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.

1.4 convergence uniforme et dérivation

Théorème 5 – interversion limite - dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si

- la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I,
- la suite de fonctions (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I,

alors

- la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- $f' = g$.

Il s'agit là encore d'un théorème d'interversion : « $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$ ».

L'hypothèse de convergence uniforme porte sur la suite (f_n') et non (f_n).

Corollaire 1

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I
- la suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors

- la limite simple f de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément vers $f^{(j)}$ sur tout segment de I.

2 Séries de fonctions

Comme précédemment, (f_n) est une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 3

La série de fonctions de terme général f_n, notée $\sum f_n$, désigne la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

2.1 modes de convergence

Définition 4

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle I si la suite de ses sommes partielles $(S_n) = (\sum\limits_{k=0}^{n} f_k)$ converge simplement sur I, soit encore si :

$$\forall x \in I, \ \ \text{la série numérique } \sum f_k(x) \text{ est convergente}$$

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur l'intervalle I si la suite de ses sommes partielles (S_n) converge uniformément sur I.
En cas de convergence, on note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$ la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$. Et on peut considérer la fonction reste de rang n,

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$$

Remarques :

— Si la série $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

— Si la série $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Propriété 3

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si, et seulement si, les deux points suivants sont satisfaits :

- la série converge simplement sur I,
- la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle : $\|R_n\|_\infty \to 0$.

Exercice 5 (oral CCINP et Mines - Télécom 2024)
Soit (a_n) une suite décroissante qui converge vers 0. Pour $x \in [0,1]$, on note $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

1. Justifier que (a_n) est bornée.
2. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ sur $[0,1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de la série (on pourra majorer le reste en calculant $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k$).
4. Calculer la limite quand n tend vers l'infini de $(\frac{n}{n+1})^n$.
5. *(paragraphe suivant)* Étudier la convergence normale de la série $\sum u_n$.

Définition 5 – convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I lorsque la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, I}$ est convergente.

Méthode – justifier une convergence normale

En pratique, pour justifier que $\sum f_n$ converge normalement, on cherchera souvent une majoration de la forme :

$$\|f_n\|_\infty \leqslant a_n \qquad \text{avec } \sum a_n \text{ série convergente}$$

Théorème 6

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

C'est pratique ! Pour démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on commence donc par examiner la convergence normale.

Convergence normale $\Rightarrow$ Convergence uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple

Exercice 6 :

1. Montrer que $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?
2. $f_n(x) = x^{n+1} \ln x$ sur $]0, 1]$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0, 1]$. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas uniformément sur $]0, 1]$.

2.2 théorèmes d'inversion

Dans cette section, nous adaptons aux séries de fonctions tous les théorèmes établis pour les suites de fonctions.

Théorème 7 – transmission de continuité

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément sur I et soit $a \in I$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Ainsi, si une série de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, sa somme est également continue sur I.

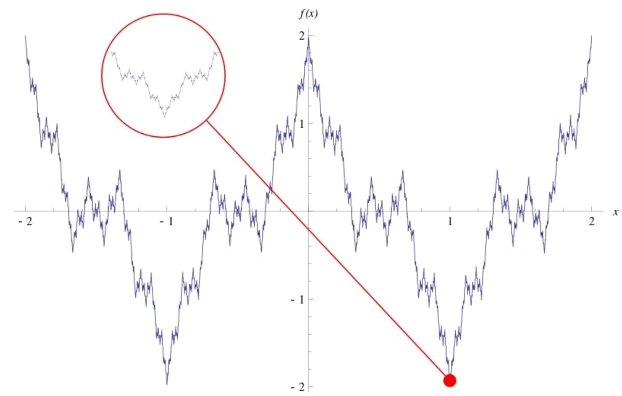
La convergence uniforme sur tout segment inclus dans I assure la continuité sur tout segment inclus dans I, donc la continuité en tout point de I, donc la continuité sur I.

Exercice 7 : Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. 0

Exercice 8 : Soit $f_n(x) = \dfrac{\cos(3^n \pi x)}{2^n}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que $W : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. C'est la fonction de Weierstrass, historiquement le premier exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part.

Source et graphe : wikipédia.



Théorème 8 – interversion somme - limite

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a point adhérent à I ou $a = \pm\infty$, alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge et :

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Théorème 9 – intégration terme à terme sur un SEGMENT

Supposons que les fonctions f_n sont continues sur le SEGMENT $[a, b]$.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série numérique $\sum \int_a^b f_n$ converge et on a l'interversion :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$$

Théorème 10 – dérivation terme à terme

Supposons que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si :

- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I,
- la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a l'interversion :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

De plus, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Théorème 11 – dérivation terme à terme (généralisation)

Supposons que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I (où $p \geqslant 1$). Si :

- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I,
- la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et on a l'interversion :

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Exercice 9 (oral Mines-Télécom) : On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Donner le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de f.
5. Donner la limite de f en $+\infty$.

Exercice 10 (oral CCINP) : On considère la fonction d'une variable réelle :

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$$

1. Déterminer le domaine de définition D de F.
2. La fonction F est-elle continue sur D ?
3. Montrer que F est monotone sur D.
4. Déterminer le domaine image $F(D)$.

3 Deux applications classiques

3.1 la fonction exponentielle

Nous allons ici démontrer que pour tout réel x, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On s'interdit donc d'utiliser ce résultat.

Exercice 11 :

1. Montrer que pour x réel, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. Calculer par ailleurs $f(0)$. En déduire que $f = \exp$.

3.2 la fonction zêta de Riemann

✎ Exercice 12 : Pour $x \in]1,+\infty[$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $I =]1,+\infty[$.
2. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Étudier ses variations et sa convexité.
3. Donner la limite de ζ en $+\infty$.
4. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner la limite et un équivalent de ζ en 1.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de ζ.

4 Approximation uniforme

4.1 approximation par des fonctions en escalier

Révisions :

— Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$,

  — $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i,x_{i+1}[$

  — $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}.

  La subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ est dite adaptée à f.

— Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est constante sur $]x_i,x_{i+1}[$.

Propriété 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f.
« Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ ».

4.2 approximation par des fonctions polynomiales

Le théorème suivant est admis, conformément au programme.

Théorème 12 – Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exercice 13 (B.E.O.) : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

5 Suites et séries de fonctions vectorielles

$(E, \|.\|)$ est ici un espace vectoriel normé de dimension finie. On rappelle que toutes les normes sur E sont équivalentes.
F est un espace vectoriel normé de dimension finie ; on note encore $\|.\|$ une norme sur F.
A désigne une partie de E. I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
On rappelle que pour $g : I \subset \mathbb{R} \to E$ fonction bornée,

$$\|g\|_\infty =$$

5.1 continuité d'une fonction vectorielle de E dans F

Soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F.

- Lorsque a appartient à A, on dit que f est continue au point a quand $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire

$$\|f(x) - f(a)\| \xrightarrow[\|x-a\| \to 0]{} 0$$

- On dit que f est continue sur A quand elle est continue en tout point de D.

5.2 modes de convergence

Définition 6

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et à valeurs dans F.

Pour les suites de fonctions :

- (f_n) converge simplement vers f sur A si : $\forall x \in A,\ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- (f_n) converge uniformément vers f sur A si : $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, A} = 0$.

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Pour les séries de fonctions :

- $\sum f_n$ converge simplement sur A si : $\forall x \in A$, la série vectorielle $\sum f_n(x)$ converge, c'est-à-dire que la suite de ses sommes partielles $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Pour $x \in A$, la série vectorielle $\sum f_n(x)$ converge absolument si la série $\sum \|f_n(x)\|$ converge.
- $\sum f_n$ converge uniformément sur A si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A $(*)$.
- $\sum f_n$ converge normalement sur A si la série $\sum \|f_n\|_{\infty, A}$ converge.

Convergence normale $\Rightarrow$ Convergence uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple

Convergence normale $\Rightarrow$ Convergence absolue en tout point $\Rightarrow$ Convergence simple

Remarques :
• $(*)$ se montre rarement. À la place, on peut utiliser la propriété : « une série de fonctions converge uniformément sur A si, et seulement si, elle converge simplement sur A et la suite de ses restes converge

uniformément vers la fonction nulle sur A ». Ou encore, utiliser la convergence normale.

- En cas de convergence normale, on dispose de l'inégalité triangulaire : $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$.

5.3 limite et continuité

Dans ce qui suit, nous passons pour l'instant la notion de *point adhérent*, que nous apprendrons au chapitre Topologie.

Théorème 13 – théorème de double limite

Pour les suites de fonctions :
Soient (f_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers f sur A et a un point adhérent à A (ou $a = \pm\infty$ dans le cas $E = \mathbb{R}$). Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite $\ell_n \in F$ en a, alors la suite (ℓ_n) possède une limite en ℓ et on a l'interversion de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Pour les séries de fonctions (interversion somme - limite) :
Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a point adhérent à A (ou $a = \pm\infty$ dans le cas $E = \mathbb{R}$), alors la série $\sum \ell_n$ converge et :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Propriété 5 – transmission de continuité

- Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur A à valeurs dans F convergeant uniformément vers f sur A, alors f est continue sur A.
- Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur A à valeurs dans F convergeant uniformément, alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

5.4 interversion limite-intégration

Théorème 14

- Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le **segment** $[a, b]$ à valeurs dans F, convergeant **uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

- Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur le **segment** $[a, b]$ à valeurs dans F, convergeant **uniformément** sur $[a, b]$. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

5.5 interversion limite-dérivation

Théorème 15

Soient des fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans F.

- On suppose que :
  - (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I,
  - (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I,

  alors
  - (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I,
  - f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
  - $f' = g$.
- On suppose que :
  - la série $\sum f_n$ converge simplement sur I,
  - la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I,

  alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a l'interversion :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

  et $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Ces résultats se généralisent à la classe $\mathcal{C}^p$, avec comme hypothèses : des convergences simples sur I pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ de $(f_n^{(k)})$ ou $\sum f_n^{(k)}$, et une convergence uniforme sur tout segment de I pour la suite $(f_n^{(p)})$ ou la série $\sum f_n^{(p)}$.

Exercice 14 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : t \mapsto e^{tA}$.

1. (révisions) Rappeler la définition de l'exponentielle de matrice, puis de $f(t)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(t)$.

5.6 approximation uniforme

Propriété 6

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans F. Alors il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers f.
« Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ ».

6 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Théorème 1

Facile justement avec les epsilon qu'on vient de visualiser.
Contre-exemple illustrant que la réciproque est fausse : $f_n(t) = t^n$ sur $[0,1]$. On a vu que (f_n) converge simplement vers f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On a $\|f_n - f\|_\infty = 1$ qui ne tend pas vers 0. Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Propriété 1

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$

Il s'agit alors de majorer chacun de ces trois termes. Par convergence uniforme de la suite (f_n), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. On considère un tel entier n.

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - f_n(a)| + \|f_n - f\|_\infty \leqslant |f_n(x) - f_n(a)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Comme enfin f_n est continue en a, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - a| < \alpha$, $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
On a ainsi montré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - a| < \alpha$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Remarque : il est possible de justifier la continuité de la limite même s'il n'y a pas convergence uniforme sur I tout entier, mais seulement au voisinage de chaque point de I. La continuité est en effet une propriété locale. Il est souvent judicieux de travailler sur un segment (et plus généralement sur un compact).

Théorème 3

Puisque (f_n) converge uniformément et que les f_n sont continues sur $[a,b]$, la fonction $f : x \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ est continue sur $[a,b]$, et l'intégrale $\int\limits_a^b f$ existe. Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$\left| \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f_n \right| \leqslant \int\limits_a^b |f - f_n| \leqslant (b-a)\|f - f_n\|_\infty$$

On conclut avec le théorème d'encadrement.

Remarque : Ce théorème repose sur la convergence uniforme et ne nécessite aucune domination. En revanche, contrairement au théorème de convergence dominée, il ne s'applique que sur un segment.

Théorème 4

Soit $[\alpha;\beta]$ un segment de I. Quitte à agrandir ce segment, on peut supposer que $a \in [\alpha;\beta]$.
Cas où $x > a$

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \int\limits_a^x |f_n(t) - f(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha;\beta]} \leqslant (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha;\beta]}$$

Cas où $x \leqslant a$: semblable. Ainsi

$$\|F_n - F\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leqslant (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha;\beta]}$$

et on termine avec le théorème d'encadrement.

Théorème 5

Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \int\limits_{x_0}^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t + f_n(x_0)$.

- Par convergence uniforme de f_n' vers g, et théorème d'inversion relatif aux primitives, $\left(x \mapsto \int\limits_{x_0}^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \int\limits_{x_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t$ sur tout segment de I.

En passant à la limite (simple) dans l'égalité de départ, il vient :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \int\limits_{x_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t + f(x_0)$$

La fonction g étant continue sur I comme limite uniforme sur tout segment de I de fonctions continues, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

- Il ne reste plus qu'à montrer la convergence uniforme sur tout segment de I de (f_n) vers f, qui découle de celle de (h_n) vers h avec $h_n : x \mapsto f_n(x) - f_n(x_0)$ et $h : x \mapsto f(x) - f(x_0)$. Pour tout segment S inclus dans I, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in S,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant |h_n(x) - h(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \|h_n - h\|_{\infty,S} + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\infty,S} \leqslant \|h_n - h\|_{\infty,S} + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

On termine avec le théorème d'encadrement.

Le corollaire 1 consisterait en une récurrence. On le passe.

Propriété 3

L'hypothèse de convergence simple permet de définir le reste de la série au rang n, noté R_n, et aussi $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$.
Comme on a $R_n = S - S_n$, on a $\|R_n\|_\infty = \|S - S_n\|_\infty$, et dès lors la convergence uniforme de (S_n) équivaut à celle de (R_n) vers 0.

Théorème 6

Supposons que $\sum f_n$ converge normalement.
- Pour $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge. Et donc $\sum f_n$ converge simplement.
- Par croissance de la somme de séries convergentes,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire, $|R_n(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$.

Donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. On en déduit que la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle.
Par ces deux points, $\sum f_n$ converge uniformément.

La réciproque est fausse : on a vu que $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ convergeait uniformément sur $[0, 1]$. Cependant, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

Propriété 4

On effectue la démonstration uniquement dans le cas où f est continue sur $[a, b]$.
D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in [a, b],\ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Construisons une fonction en escalier $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.
- Choisissons d'abord une bonne subdivision. Soit $n \in N^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \alpha$. On pose, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.
- Notons alors φ la fonction définie sur $[a, b]$ par $\varphi(b) = f(b)$ et pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et $x \in [x_i, x_{i+1}[$, $\varphi(x) = f(x_i)$.

φ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
- Montrons que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. Soit $x \in [a, b]$. Il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}[$.

$$|x - x_i| < x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} < \alpha \text{ donc } |f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Ainsi, $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.

Il suffit maintenant de construire une suite de fonctions en escalier en considérant pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction φ_p précédemment construite pour $\varepsilon = \frac{1}{p+1}$.
On a ainsi trouvé une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f (car $\|f - \varphi_p\|_\infty < \frac{1}{p+1}$ et théorème d'encadrement).