Fonctions vectorielles de la variable réelle

Ce chapitre a deux objectifs :

— étendre rapidement le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;

— fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.

Les attentes

1. Dérivabilité en un point. Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique.
2. Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est multilinéaire. Cas du produit scalaire, du déterminant.
3. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.
4. Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.
5. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
6. Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
7. Formule de Taylor-Young.

1. Savoir définir l'intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$. Propriétés. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire. Sommes de Riemann.

Le but de ce chapitre est de généraliser aux fonctions vectorielles les notions de dérivée, d'intégration sur un segment et de primitive. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$. f est une fonction de I dans E. $\|.\|$ désigne une norme de E.

Comme fonctions vectorielles, nous aurons par exemple des fonctions :

$$f : \begin{pmatrix} I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)) \end{pmatrix}$$

où les fonctions f_i sont des fonctions réelles de la variable réelle, ou bien encore, puisqu'on disposera d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$,

$$f : t \mapsto f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_p(t)e_p$$

Les fonctions f_i sont les fonctions *coordonnées* ou *composantes* de f. L'équivalence des normes en dimension finie nous assurera que les propriétés de régularité (comme la continuité et la dérivabilité) ne dépendent pas de la base choisie.

1 Limites et continuité (révisions)

- f admet la limite ℓ en t_0, et on note $\lim_{t \to t_0} f(t) = \ell$, lorsque $\|f(t) - \ell\| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$, soit encore

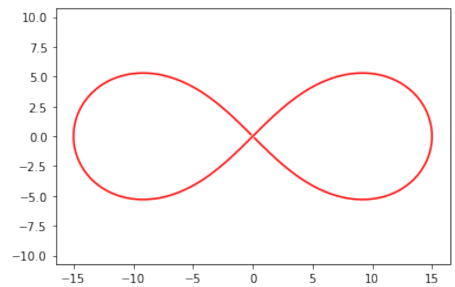
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in I,\ |t - t_0| < \alpha \Rightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon$$

- Dans E muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$, $f : t \mapsto f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_p(t)e_p$ admet la limite $\ell = \ell_1 e_1 + \cdots + \ell_p e_p$ quand t tend vers t_0 si, et seulement si, chacune des composantes $f_i(t)$ admet la limite ℓ_i quand t tend vers t_0.
- f est continue en t_0 lorsque $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$. f est continue sur I si f est continue en tout point de I. Cela revient à demander la continuité de chacune de ses composantes.

Exercice 1 : On considère

$$f : t \mapsto \left(\frac{t + t^3}{1 + t^4}, \frac{t - t^3}{1 + t^4} \right)$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.



2 Dérivabilité

2.1 définitions

Définition 1

- f est dérivable en t_0 si la quantité
$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$
admet une limite quand t tend vers t_0. Le vecteur limite : $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ est alors appelé vecteur dérivé en t_0. On le note $f'(t_0)$.
- f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point t_0 de I. Sa fonction dérivée est alors $f' : t \mapsto f'(t)$.

Je vous laisse adapter pour obtenir la notion de dérivabilité à gauche, à droite en t_0.

Propriété 1

La dérivabilité de f se traduit par la dérivabilité des fonctions composantes : dans E muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$, $f : t \mapsto f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_p(t)e_p$ est dérivable sur I si, et seulement si, ses composantes sont dérivables sur I. On a alors :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = f_1'(t)e_1 + f_2'(t)e_2 + \cdots + f_p'(t)e_p$$

Définition 2

Pour g définie sur un voisinage de t_0 et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (g est une *fonction scalaire*), on dit que f est *négligeable* devant g en t_0, et on note $f \underset{t_0}{=} o(g)$ lorsque $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.

Propriété 2

f est dérivable en t_0 si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0. Dans ce cas, le développement limité est :

$$f(t) \underset{t_0}{=} f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

Exemple : $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \underset{(0,0)}{=}$.

Remarques :

— On effectue souvent la translation $t = t_0 + h$. Quand t est proche de t_0, h est proche de 0. Le développement limité s'écrit aussi :

$$f(t_0 + h) \underset{0}{=} f(t_0) + f'(t_0)h + o(h)$$

— La dérivabilité entraîne la continuité.

— Interprétation cinématique. Lorsque la fonction f représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur $f'(t_0)$ représente la *vitesse instantanée* du point à l'instant t_0.

— Une application est constante sur I si, et seulement si, elle est dérivable et de dérivée nulle sur I.
En effet, f est constante si, et seulement si, ses applications coordonnées le sont. Celles-ci sont des fonctions numériques ; cela revient donc à demander qu'elles aient une dérivée nulle, autrement dit que $f' = 0$.

2.2 opérations sur les dérivées

Lorsque $p \neq 1$, le produit de fonctions n'a en général plus de sens. Attention à ne pas parler de « produit de fonctions dérivables » trop rapidement. On pourrait énoncer les propriétés qui suivent en un point t_0 ; j'ai choisi de les énoncer sur I.

Propriété 3

combinaison linéaire Une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I. Pour f, g fonctions dérivables sur I et à valeurs dans E, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

produit avec une fonction scalaire Le produit d'une fonction dérivable sur I par une fonction **scalaire** dérivable sur I est dérivable sur I. Pour $f : I \to E$ et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivables, on a $(\lambda.f)' = \lambda'.f + \lambda.f'$.

composée à droite par une fonction scalaire Si $u : \mathbb{R} \to I$ est dérivable, la composée $f \circ u$ est dérivable et on a $(f \circ u)' = u'.\, f' \circ u$.

Exemple : Si $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors c'est aussi le cas de $F : t \mapsto M(\arctan t)$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F'(t) =$$

Propriété 4 – composition avec une application linéaire

Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel F de dimension finie, et $f : I \to E$ dérivable. Alors $L(f)$ est dérivable sur I et

$$[L(f)]' = L(f')$$

N'écrivez pas de formule de « dérivation d'une composée » car la dérivée d'une application linéaire n'a pas de sens. On n'apprend ici à dériver que des applications de la variable réelle.

Exemples :

- Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Alors $F : t \mapsto \operatorname{Tr}(A(t))$ est dérivable sur I et $F'(t) =$

  Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, $A'(t) =$ et on vérifie que la dérivée de $\operatorname{Tr}(A(t))$ est

- Soit $M : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable. La dérivée de $M^\top : t \mapsto (M(t))^\top$ est :

Propriété 5

Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f, g)$ est dérivable sur I et on a

$$[B(f,g)]' = B(f', g) + B(f, g')$$

Par exemple, lorsque E est un espace euclidien, pour f et g dérivables sur I, la fonction $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est dérivable sur I et

$$\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$$

et $t \mapsto \|f\|^2$ est dérivable sur I et $(\|f\|^2)' =$

Propriété 6

Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels de dimension finie et M une application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F. Si $f_1, \dots, f_p$ sont des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors $M(f_1, \dots, f_p)$ est dérivable sur I et on a

$$[M(f_1, \dots, f_p)]' = M(f_1', f_2, \dots, f_p) + M(f_1, f_2', \dots, f_p) + \cdots + M(f_1, f_2, \dots, f_p')$$

Par exemple,

$$[\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p)]' = \det_{\mathcal{B}}(f_1', f_2, \dots, f_p) + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2', \dots, f_p) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \dots, f_p')$$

Exercice 2 : Calculer $D'(x)$ où $D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2/2 & x & 1 \\ x^3/6 & x^2/2 & x \end{vmatrix}$. En déduire $D(x)$.

2.3 fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Comme pour les fonctions de $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, on définit la notion de dérivée k-ième pour $f : I \to E$.

— La dérivée d'ordre 0 est $f^{(0)} = f$. La dérivée d'ordre 1 est $f^{(1)} = f'$ si f est dérivable.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, si la dérivée d'ordre n (ou n-ième) de f existe et est dérivable, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

— Interprétation cinématique : lorsque f représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur $f''(t_0)$ représente le vecteur d'accélération du point à l'instant t_0.

Enfin, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ si f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k. Là encore, il suffit d'étudier les coordonnées de f dans n'importe quelle base de E :

$$\text{pour } f = f_1e_1 + \cdots + f_pe_p, \quad f^{(k)} = f_1^{(k)}e_1 + \cdots + f_p^{(k)}e_p$$

Pour terminer, mentionnons la généralisation de deux propriétés vues plus haut, qui se démontrent par récurrence.

Propriété 7

Pour L application linéaire de E dans F, B application bilinéaire de $E \times G$ dans F, et f, g de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs dans E et G, on a :

- $L \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\quad [L(f)]^{(n)} = L \circ f^{(n)}$
- **Formule de Leibniz**

  $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\qquad [B(f,g)]^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B(f^{(j)}, g^{(n-j)})$

3 Intégration

3.1 intégrale d'une fonction continue par morceaux et propriétés

Définition 3

Une fonction $f : [a,b] \to E$ est dite *continue par morceaux* si ses coordonnées dans une base de E le sont. La continuité par morceaux ne dépend pas de la base choisie.
Une fonction $f : I \to E$ est *continue par morceaux* si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.
On note $\mathcal{CM}(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans E.

Sans surprise, nous définissons l'intégrale d'une fonction vectorielle en passant par ses coordonnées, qui sont des fonctions numériques pour lesquelles l'intégrale a déjà été définie. Nous admettons que la définition donnée est indépendante de la base choisie.

Définition - propriété 1

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs dans E. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. On note $f_1, \ldots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans cette base : $f = f_1e_1 + f_2e_2 + \cdots + f_pe_p$.
On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1\right) e_1 + \left(\int_a^b f_2\right) e_2 + \cdots + \left(\int_a^b f_p\right) e_p$$

Cette quantité est indépendante du choix de la base de E.

On peut aussi noter $\int_{[a,b]} f$, ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Par exemple, pour $f(t) = (x(t), y(t))$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t =$

On étend la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\begin{cases} \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t & = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t & = 0 \end{cases}$

Une fois une base de E fixée, pour établir des propriétés de l'intégrale vectorielle sur $[a, b]$, on se ramène aux fonctions coordonnées. On peut, de cette façon, montrer facilement les quatre points de la propriété suivante.

Propriété 8

Soient f, g des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans E et λ, μ dans $\mathbb{K}$.

- **Linéarité**

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

- **Relation de Chasles**

$$\forall c \in [a, b], \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

- **Effet d'une application linéaire**

  Pour L application linéaire, $\qquad L(\int_a^b f) = \int_a^b L \circ f$

- **Propriété des sommes de Riemann**

  Les sommes de Riemann associées à f sur $[a, b]$, $S_n(f)$ et $T_n(f)$, convergent vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini.

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \qquad \text{et} \qquad T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

Nous représentons les sommes de Riemann $S_{10}(f)$ et $T_{10}(f)$.

Propriété 9 – inégalité triangulaire

Pour $a \leqslant b$ et f continue par morceaux sur $[a, b]$, on a

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$$

Exercice 3 (début de Centrale 2024) : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J. Démontrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\,\mathrm{d}t$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann. Cette inégalité est l'inégalité intégrale de Jensen.

3.2 primitives et intégrales

On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I vérifiant $F' = f$. Si f admet des primitives, celles-ci se déduisent les unes des autres par addition d'une constante vectorielle.
Les primitives de f peuvent se calculer à partir des fonctions coordonnées de f.
On retrouve le théorème fondamental de l'intégration, que nous admettons mais qui résulte, une fois encore, du travail sur les fonctions coordonnées.

Théorème 1 – théorème fondamental de l'intégration

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Pour tout $b \in I$, pour toute primitive F de f, on peut calculer les intégrales à l'aide de primitives :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

> Quand f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, f est une primitive de f', et on a :
>
> $$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{soit encore} \quad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 10 – inégalité des accroissements finis

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Dans $[0, +\infty]$, on a :

$$\forall (c, d) \in I^2, \quad \|f(c) - f(d)\| \leqslant \sup_{t\in I} \|f'(t)\| \times |c - d|$$

$$\forall (c, d) \in I^2, \quad \|f(c) - f(d)\| \leqslant \|f'\|_{\infty, I} \times |c - d|$$

✎ Exercice 4 : Montrer que pour tout réel x, on a $|\sin x| \leqslant |x|$.

Interprétation cinématique : un mobile qui se déplace à une vitesse instantanée de norme inférieure ou égale à v_{max} pendant un temps T, se retrouve au maximum à une distance $v_{max} \times T$ de son point de départ.

4 Formules de Taylor

Encore une fois, les théorèmes suivants (formules de Taylor vectorielles) s'obtiennent en appliquant les formules de Taylor aux fonctions coordonnées de f.

4.1 formules globales

Dans les deux formules suivantes, l'ordre de a et b n'importe pas (on ne demande pas $a \leqslant b$).

Théorème 2 – formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. On a pour a et $b \in I$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 3 – inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I.

- Version dans $[0,+\infty]$. En travaillant dans $[0,+\infty]$,

$$\forall (a,b) \in I, \ \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leqslant \|f^{(n+1)}\|_{\infty,\,I} \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Version sur $[a,b]$.
  Pour a et b dans I, on a l'inégalité :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leqslant \max_{t\in[a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\| \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

4.2 formule locale

Théorème 4 – formule de Taylor-Young

Pour f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Cette dernière expression s'appelle *développement limité* à l'ordre n en a.

5 Vecteurs tangents à un arc

Dans le chapitre Calcul différentiel, nous aurons à présenter les vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel normé. Nous montrons ici quelques exemples de vecteurs tangents à des arcs paramétrés. Il s'agit d'illustrations, l'étude détaillée des arcs paramétrés n'est plus au programme.

On appelle *arc paramétré* à valeurs dans E tout couple (I, γ) où I est un intervalle et γ est tout simplement une fonction vectorielle de I dans E.

Révisions de Terminale :

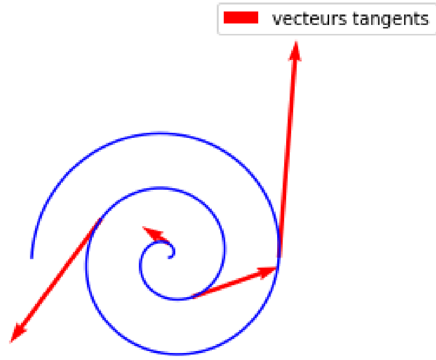
Équation paramétrée d'une droite de $\mathbb{R}^3$:

Équation paramétrée d'un plan de $\mathbb{R}^3$:

La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de (I, γ) en t_0 est la droite passant par $\gamma(t_0)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t_0)$, d'équation paramétrée :

$$\mathcal{T} = \{\gamma(t_0) \ + \ s\,\gamma'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}\} = \gamma(t_0) \ + \ \mathrm{Vect}(\gamma'(t_0))$$

Exemple dans $E = \mathbb{R}^2$



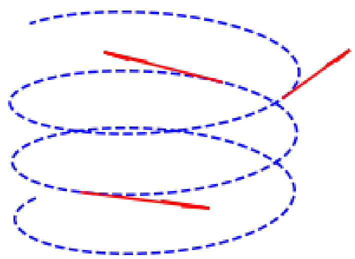
Dans l'exemple ci-contre,

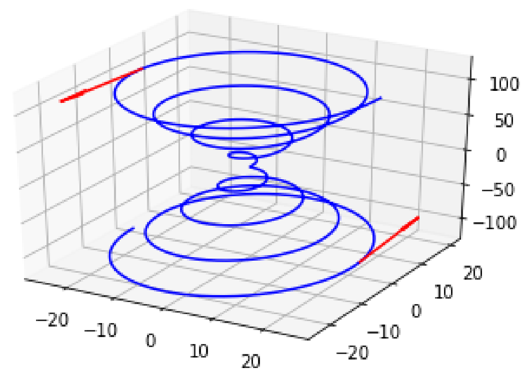
$$f = \gamma : \left(\begin{array}{ccc} I & \to & E = \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t\cos t, t\sin t) \end{array} \right)$$

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} t_0 \cos t_0 \\ t_0 \sin t_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \cos t_0 - t_0 \sin t_0 \\ \sin t_0 + t_0 \cos t_0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemples dans $E = \mathbb{R}^3$

À gauche, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. À droite, $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, 5t)$. En bleu, l'arc paramétré et en rouge, des vecteurs tangents.





6 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Propriété 4

Par linéarité de f,

$$\frac{L\circ f(t)-L\circ f(t_0)}{t-t_0} = L\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right) = L\left(f'(t_0)+o(1)\right)$$

Comme L est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, L est continue sur E, et en particulier en $f'(t_0)$. Donc $\lim\limits_{t\to t_0} L\left(f'(t_0)+o(1)\right) = L(f'(t_0))$.

Propriété 5

$$\begin{aligned}\frac{[B(f,g)](t)-[B(f,g)](t_0)}{t-t_0} &= \frac{B(f(t),g(t))-B(f(t_0),g(t_0))}{t-t_0} = \frac{B(f(t),g(t))-B(f(t_0),g(t)+B(f(t_0),g(t))-B(f(t_0),g(t_0))}{t-t_0}\\ &\quad\text{par bilinéarité de } B\\ &= B\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},g(t)\right)+B\left(f(t_0),\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right)\\ &= B(f'(t_0)+o(1),g(t))+B(f(t_0),g'(t_0)+o(1))\end{aligned}$$

Or g est dérivable en t_0, donc continue en t_0. Donc $g(t)\xrightarrow[t\to t_0]{} g(t_0)$. B est une application bilinéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, donc B est continue. On obtient que la limite du taux d'accroissement en t_0 est

$$B(f'(t_0),g(t))+B(f(t_0),g'(t_0))$$

Propriété 9 (inégalité triangulaire)

Remarquons pour commencer qu'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée, donc $\sup\limits_{[a,b]}\|f\|$ existe. On aurait pu noter, à la place, $\|f\|_\infty$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et $S_n(f)$ somme de Riemann associée à f. Pour alléger, on pose $a_k=a+k\frac{b-a}{n}$. Par inégalité triangulaire dans E,

$$\|S_n(f)\| = \|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)\| \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f(a_k)\|$$

En notant $g(t)=\|f(t)\|$, on a $\|S_n(f)\|\leqslant S_n(g)$ $(*)$.

Comme f est continue par morceaux, $S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int\limits_a^b f$. Par continuité de $\|.\|$, $\|S_n(f)\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\|\int\limits_a^b f\|$.

Comme f est continue par morceaux, et que $\|.\|$ est continue, g est continue par morceaux sur $[a,b]$. Donc $S_n(g)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int\limits_a^b g$.

Il ne reste plus qu'à passer à la limite quand n tend vers l'infini dans $(*)$.

Propriété 10 (inégalité des accroissements finis)

Premier cas : $c\leqslant d$.
Quand f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, f est une primitive de f', et on a :

$$\|f(d)-f(c)\| = \|\int\limits_c^d f'(t)\,\mathrm{d}t\| \leqslant \int\limits_c^d \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant k|c-d|$$

par inégalité triangulaire.
On fera remarquer que f est k-lipschitzienne sur I.

Deuxième cas : $c>d$.
On applique le résultat du premier point au couple (d,c) au lieu de (c,d).

Théorème 2

La formule s'obtient là encore avec les fonctions coordonnées !
Je mets ici pour moi la démonstration du cas de fonctions numériques.

Pour $n=0$, nous retrouvons $f(b)=f(a)+\int\limits_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Soit la *fonction approximation* $g : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, ses dérivées k^{e} avec $k \leqslant n$ sont toutes dérivables de dérivées continues) et on a

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n
\end{aligned}$$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc on a

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{d}t$$