

1 Infiniment grand

Prédominances usuelles sur les suites

Prédominances usuelles sur les fonctions en $+\infty$

Exercice 1 : Les réponses et/ou les rédactions suivantes sont incorrectes. Les corriger.

1. $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ donc $e^{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$.

2. $\frac{3n^2 + 5e^n}{n + e^{-n}} \sim \frac{e^n}{n}$

3. $\sin x \underset{0}{\sim} x - \frac{x^3}{6}$

4. $\ln x + \sqrt{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x+1}$

5. $(1+x)^{1/3} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}x$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $(1+x)^{1/3} - 1 + \ln(1+x) \underset{0}{\sim} \frac{4}{3}x$.

2 Développements limités

Au voisinage de a

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est :

$$y =$$

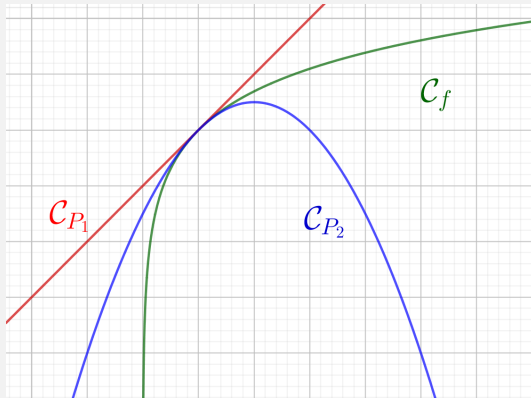
Les développements limités de f en a à l'ordre 0, puis à l'ordre 1, à l'ordre 2, à l'ordre 3, sont :

$$f(x) \underset{a}{=}$$

$$f(x) \underset{a}{=}$$

$$f(x) \underset{a}{=}$$

$$f(x) \underset{a}{=}$$



Les polynômes de Taylor de f en a sont :

À l'ordre 0

À l'ordre 1

À l'ordre 2

Désormais, pour simplifier, nous nous plaçons au voisinage de $a = 0$. Les polynômes de Taylor de f en 0 sont :

$$P_0(x) =$$

$$P_1(x) =$$

$$P_2(x) =$$

Exercice 2 : Calculer la limite quand x tend vers 0 de $(1 + \frac{1}{x})^x$.

Exercice 3 : Donner un équivalent en 0 de $f(x) = \frac{x^2}{1+x} - x$ et de $g(x) = \frac{1}{1-x} - 1 + x$.

Exercice 4 : Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $H(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{1+t} dt$.

Exercice 5 : Calculer la limite en 0 de $\frac{\ln(1 + \sin x) - x}{1 + x - e^x}$.

Exercice 6 (extrait de Mines 2024) : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent en 0 de

$$f(t) = \frac{1 - (\cos t)^{2p+1}}{t^2}$$

3 Exemples de développements asymptotiques

Exercice 7 : Donner le développement asymptotique à 2 termes, au voisinage de $+\infty$, de

$$\ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^{-2x})$$

Exercice 8 : Donner le développement asymptotique à 2 termes de $\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$.

Exercice 9 : Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n} - \frac{(f(1) + f'(1))}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Voici la liste des développements limités **au voisinage de 0** à connaître par cœur.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$(\alpha \in \mathbb{R}), (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \frac{x^3}{3!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$