

Compléments d'algèbre linéaire

Les attentes



1. Savoir montrer que deux espaces sont supplémentaires, et plus généralement, que des espaces sont en somme directe.
2. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
3. Savoir calculer le projeté d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel, parallèlement à un sous-espace vectoriel.
4. Inégalité : $\dim(\sum_{i=1}^p F_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ et cas d'égalité.
5. Être à l'aise dans les calculs par blocs.



6. Transvections par blocs.

1 Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, $p \geq 2$, $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

Définition - propriété 1

On appelle *somme* de $F_1, \dots, F_p$, et on note $\sum_{i=1}^p F_i$, l'ensemble

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \{x_1 + x_2 + \dots + x_p \mid x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_p \in F_p\}$$

$F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E à contenir tous les F_i .

Définition 1

On dit que la somme $F = F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est *directe*, et on note $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ ou $\bigoplus_{i=1}^p F_i$, lorsque la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ en somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels F_i est unique.

Propriété 1 – Caractérisation par la décomposition de 0_E

Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si, et seulement si, la décomposition du vecteur nul comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i est unique.

Exercice 1 : Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. On considère :

F l'ensemble des fonctions constantes sur $[-1, 1]$

G l'ensemble des fonctions de E qui sont nulles sur $[-1, 0]$

H l'ensemble des fonctions de E qui sont nulles sur $[0, 1]$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$. Donner les projecteurs associés à cette somme directe.

Propriété 2 – Caractérisation par les dimensions

On suppose ici que E est de dimension finie. On a toujours

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

et il y a égalité dans cette inégalité si, et seulement si, la somme est directe.

Théorème 1 – Théorème de la base adaptée

Ici E est un espace vectoriel de dimension finie.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E , de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ est une somme directe.
2. La concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ est une base de E .

Lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, on appelle *projecteurs associés* à cette somme directe, les projections p_i où p_i est la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$.

Et on appelle *base adaptée* à cette somme directe, toute base de E qui est concaténation de bases de $F_1, \dots, F_p$.

Propriété 3

La famille des projecteurs associés à $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ vérifie :

$$\sum_{i=1}^p p_i = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0$$

Propriété 4 – caractérisation d'une application linéaire par ses restrictions

F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On se donne $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ et p applications linéaires $u_i : F_i \rightarrow F$.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ pour laquelle chaque restriction $u|_{F_i}$ est égale à u_i .

2 Matrices dans des bases adaptées

Définition 2

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si $\forall x \in F, f(x) \in F$

L'endomorphisme *induit* par u sur F est l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par :

$$u_F : \begin{pmatrix} F & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Soient u et w deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par w .

 Exercice 3 : Les questions sont indépendantes, mais toutes sur le thème du choix d'une base adaptée et de sous-espaces stables.

1. Rappeler la matrice d'un projecteur dans une base adaptée à $E = \ker(p - \operatorname{Id}) \oplus \ker p$. Donner la matrice d'une symétrie dans une base adaptée à $E = \ker(s - \operatorname{Id}) \oplus \ker(s + \operatorname{Id})$.
2. On considère la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de f dans la base $(e_1 + e_3, e_2, e_3)$. Donner deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, autres que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$, stables par f .

3. On suppose que F_1, F_2 et F_3 sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$, et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, F_i est stable par l'endomorphisme u . Quelle est l'allure de la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ?
4. On considère l'endomorphisme u de matrice dans la base $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ de E donnée par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner des exemples de sous-espaces stables par u .

5. Pour terminer, on reprend la propriété 4. On reprend $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ et p applications linéaires $u_i : F_i \rightarrow F$. On considère l'unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout i , la restriction $f|_{F_i}$ est égale à u_i .
 - (a) Donner la matrice de f dans une base adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.
 - (b) Même question sous l'hypothèse supplémentaire où les F_i sont stables par f .

Réduire un endomorphisme u consistera à écrire E comme somme directe de sous-espaces stables par u pour lesquels les matrices associées seront les plus simples possibles, par exemple diagonales ou triangulaires. Déterminer des conditions pour établir l'existence de tels espaces est l'un des grands

objectifs du programme d'algèbre de MP. Pour l'instant, nous savons réduire une matrice de projection et une matrice de symétrie.

Exercice 4 – Exercice résolu. Réduire s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M . $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

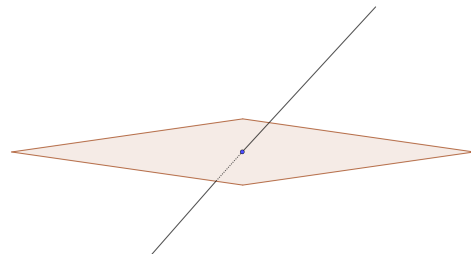
et $M^2 = I_3$ donc M est une matrice de symétrie.

On cherche $\ker(s - \text{Id})$ et $\ker(s + \text{Id})$. On trouve

$$\ker(s - \text{Id}) = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)) \quad \ker(s + \text{Id}) = \text{Vect}(1, 1, 1)$$

Une base adaptée à $\mathbb{R}^3$ est $(u, v, w) = ((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$.

Dans cette base, la matrice de s est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. s est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(u, v)$ parallèlement à $\text{Vect}(w)$.



3 Matrices définies par blocs

3.1 combinaison linéaire, produit

Pour A, B, C, D matrices de tailles compatibles, une matrice par blocs est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$. On peut étendre à davantage de blocs encore. En particulier, il y a des matrices *triangulaires par blocs*, qui peuvent être supérieures ou inférieures (les matrices A_i suivantes sont toutes des matrices carrées) :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & A_r \end{pmatrix}$$

Le déterminant est dans ce cas égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

Il y a aussi les matrices *diagonales par blocs* :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$$

Les opérations ne posent pas de problème, que ce soit la multiplication par un scalaire, l'addition, ou encore le produit. Le produit par blocs s'effectue en gros comme un produit usuel mais comme le produit matriciel n'est pas commutatif, il faut faire attention à l'ordre dans lequel on écrit chaque produit.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ \hline -1 & -2 & -3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array} \right) =$$

Produit : avec des matrices de tailles compatibles,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} E & G \\ \hline F & H \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AE + BF & AG + BH \\ \hline CE + DF & CG + DH \end{array} \right)$$

Transposée :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)^\top = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array} \right)$$

Par exemple, la matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M & C \\ \hline L & \alpha \end{array} \right)$ devra être multipliée à droite comme suit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \\ \\ - \end{array} \right)$$

mais ensuite, on peut faire des blocs de types différents, par exemple :

$$\left(\begin{array}{c|c} M & C \\ \hline L & \alpha \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} M & C \\ \hline L & \alpha \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} X & N \\ \hline \beta & L_2 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} M & C \\ \hline L & \alpha \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} N & X \\ \hline L_2 & \beta \end{array} \right) =$$

Exercice 5 : On donne $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quels blocs voyez-vous naturellement ? Calculer M^2 en utilisant un produit par blocs.

Exercice 6 : (5/2 *uniquement* !) On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$.

Calculer $\text{Tr}(A^2)$ à l'aide d'un calcul par blocs. En déduire les valeurs propres de A .

Exercice 7 : Soit P une matrice inversible. Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$?

Exercice 8 (extrait problème CCINP) : $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que la matrice $Q = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.
2. Démontrer alors que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

3.2 tranvections par blocs

En première année, vous avez rencontré des matrices de transvection de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$, et vous avez vu qu'une multiplication de A par une telle matrice effectuait une opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes de A . Nous généralisons ici. Il ne s'agit pas d'apprendre par cœur mais de pouvoir retrouver rapidement telle ou telle opération élémentaire par blocs.

Propriété 6

- Une action sur les colonnes ? Transvection à droite !

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix} =$$

En prenant $T = \lambda I$, on pourra retrouver $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2$ (ou $C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1$), tout en notant que ces actions sont faites sur plusieurs colonnes en même temps.

- Une action sur les lignes ? Transvection à gauche !

$$\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} =$$

En prenant $T = \lambda I$, on pourra retrouver $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$ (ou $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$), tout en notant que ces actions sont faites sur plusieurs lignes en même temps.

Comme les matrices $\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix}$ sont triangulaires et n'ont que des 1 sur la diagonale, elles sont inversibles et de déterminant 1. Par conséquent, multiplier par des matrices de transvection par blocs conserve le rang et le déterminant.

Comme dans la méthode du pivot, on peut s'en servir pour obtenir des matrices triangulaires par blocs et calculer le rang ou le déterminant.

4 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Définition-propriété 1

Pour les 3 points de sous-espace vectoriel :

- $F_1 + \dots + F_p \subset E$
- $0_E \in F_1 + \dots + F_p$ car $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}$.
- Avec des notations évidentes, pour tous $x = x_1 + \dots + x_p$, $y = y_1 + \dots + y_p$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda x + y = \underbrace{\lambda x_1 + y_1}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{\lambda x_p + y_p}_{\in F_p}$$

par stabilité par combinaison linéaire des F_i en tant que sous-espaces vectoriels.

Par ailleurs, $x_i \in F_i$ s'écrit $0_E + \dots + 0_E + x_i + 0_E + \dots + 0_E \in F_1 + \dots + F_p$.

Propriété 1

Le sens direct est immédiat, puisque dans une somme directe, la décomposition de tout vecteur est unique. Reste à montrer que l'unicité de la décomposition du vecteur nul implique l'unicité de la décomposition de n'importe quel vecteur. Supposons que $x_1 + \dots + x_p = y_1 + \dots + y_p$ avec pour tout i , $x_i \in F_i$, $y_i \in F_i$. Alors :

$$x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_p - y_p = 0 \text{ avec pour tout } i, x_i - y_i \in F_i$$

Par unicité de la décomposition du vecteur nul, $x_i - y_i = 0$ pour tout i . Puis $x = y$.

Propriété 2

Remarque : si l'on souhaite seulement établir « $\dim(F_1 + \dots + F_p) \leq \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p)$ », alors on peut procéder par récurrence sur $p \geq 1$ en utilisant

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G \leq \dim F + \dim G$$

L'application linéaire $\varphi : \begin{pmatrix} F_1 \times \dots \times F_p & \longrightarrow & F_1 + \dots + F_p \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \dots + x_p \end{pmatrix}$ est surjective.

• Si φ est injective (c'est le cas où la somme est directe), c'est un isomorphisme et $\dim F_1 \times \dots \times F_p = \dim(F_1 + \dots + F_p)$. Donc $\dim F_1 + \dots + \dim F_p = \dim(F_1 + \dots + F_p)$.

- Sinon, φ n'est pas injective, et alors par le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } \varphi < \dim(F_1 \times \dots \times F_p) \quad \text{soit} \quad \dim(F_1 + \dots + F_p) < \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p)$$

Théorème 1

On note $F = F_1 + F_2 + \dots + F_p$. On va montrer $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ où

1. F est une somme directe
2. la concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ est une base de F
3. $\dim F = \sum_{i=1}^p \dim F_i$.

et cela fournira en particulier le théorème de la base adaptée du cours.

- $((1) \Rightarrow (2))$ On suppose que $F = F_1 + \dots + F_p$ est une somme directe.

Soit $\mathcal{F}$ la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$, bases respectives de $F_1, \dots, F_p$.

On note $(b_1^{(j)}, \dots, b_{n_j}^{(j)})$ la base $\mathcal{B}_j$.

— $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

Si $\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{i,j} b_i^{(j)} = 0_E$, alors par unicité de la décomposition de 0_E dans une somme directe, on a (bien identifier les vecteurs des F_j) :

$$\forall j, \quad \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{i,j} b_i^{(j)} = 0$$

mais alors par liberté de $\mathcal{B}_j$, pour tout i entre 1 et n_j , $\lambda_{i,j} = 0$. $\mathcal{F}$ est libre.

— $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de F ?

Soit $x \in F$. x s'écrit $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ avec $x_1 \in F_1 = \text{Vect}(\mathcal{B}_1), \dots, x_p \in F_p = \text{Vect}(\mathcal{B}_p)$. Donc $x \in \text{Vect}(\mathcal{F})$.

- ((2) $\Rightarrow$ (3))

On poursuit avec les mêmes notations. Puisque $\mathcal{F}$ est une base de F , $\dim F = \text{Card } \mathcal{F} = \sum_{j=1}^p n_j = \sum_{j=1}^p \dim F_j$.

- ((3) $\Rightarrow$ (2))

Soit encore $\mathcal{F}$ la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$, bases respectives de $F_1, \dots, F_p$.

Avec la même rédaction que dans (1) $\Rightarrow$ (2), $\text{Vect}(\mathcal{F}) = F$. De la famille génératrice $\mathcal{F}$, on peut extraire une base de F . Or $\text{Card } \mathcal{F} = \dim F_1 + \dots + \dim F_p \stackrel{(3)}{=} \dim F$. C'est donc que dans notre extraction, aucun vecteur n'a été enlevé. Et donc que $\mathcal{F}$ est une base de F .

- ((2) $\Rightarrow$ (1))

On suppose que $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E$ avec $x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$. Chaque x_j se décompose dans $(b_1^{(j)}, \dots, b_{n_j}^{(j)})$ base $\mathcal{B}_j$ de F_j .

On se retrouve avec une somme du type $\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (x_j)_i b_i^{(j)} = 0_E$. Par liberté de la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$, on obtient $(x_j)_i = 0$ pour tout i , tout j , puis $x_j = 0_E$ pour tout j .

Propriété 3

- Pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$ où $x_i \in F_i$, pour tout i . Par définition de p_i , $x_i = p_i(x)$. On a donc facilement

$$x = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_p(x)$$

- L'écriture $p_j(x) = 0_E + \dots + 0_E + p_j(x) + 0_E + \dots + 0_E$ fournit, par définition de p_i , pour $i \neq j$, $p_i(p_j(x)) = 0_E$.

Propriété 4

- Analyse. Supposons que u existe. Pour $x \in E$, on a $x = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_p(x)$ avec les notations de la propriété 3. Par linéarité de u ,

$$u(x) = u(p_1(x)) + u(p_2(x)) + \dots + u(p_p(x)) = u_1(p_1(x)) + \dots + u_p(p_p(x))$$

et $u(x)$ est défini de manière unique.

- Synthèse. Réciproquement, notons $u : x \mapsto \sum_{k=1}^p u_k \circ p_k$. On a $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $x \in F_i$. Comme $F_i = \text{Im } p_i = \text{Inv } p_i$, on a $p_i(x) = x$.

$$u(x) = \sum_{k=1}^p u_k \circ p_k(p_i(x))$$

avec la propriété 3, il vient :

$$u(x) = u_i \circ p_i(p_i(x)) + 0_E = u_i(p_i(x)) = u_i(x)$$