

1 Systèmes linéaires

Un système linéaire peut admettre :

- soit aucune solution,
- soit une infinité de solutions,
- soit une unique solution. On dit alors que c'est un système de Cramer. Ce cas survient si, et seulement si, le déterminant du système est non nul.

Pour résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauß, on ramène le système à un système triangulaire, on complète les lignes manquantes, et on effectue la remontée.

Exercice 1 : Donner un exemple à 2 inconnues x et y pour chacun des cas de figure (0 solution / 1 solution / une infinité de solutions). Pour chacun, mettre le système sous forme matricielle. Pour chacun, calculer le déterminant du système.

Exercice 2 : Effectuer la méthode du pivot de Gauß sur les systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 3 (extrait oral CCINP 2025) :
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b\bar{z}$$

Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution $z \in \mathbb{C}$ non nulle si, et seulement si, $|a| = |b|$. Pour cela, on décomposera a , b et z dans la base $(1, i)$.



SAVOIR-FAIRE

Un système linéaire homogène est un espace vectoriel. Il faut savoir le présenter sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille.

Exercice 4 : Mettre F sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille, pour chacun des cas suivants.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\}$
2. $F = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$



SAVOIR-FAIRE

La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système écrit matriciellement $AX = Y$ est un système de Cramer.

Dans ce cas, $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$.

Exercice 5 : Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode de Cramer.

2 Calcul matriciel

La formule du coefficient en ligne i et colonne j d'un produit de deux matrices est :

$$[AB]_{i,j} =$$

Exercice 6 : Redémontrer l'associativité $(AB)C = A(BC)$ pour A, B, C matrices carrées d'ordre n .

Exercice 7 (Étudiants à l'aise uniquement). On travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler quelle matrice élémentaire est la matrice $E_{i,j}$.
2. Quelle formule a-t-on pour le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$? La démontrer, en distinguant les cas $j = k$ et $j \neq k$.

3 Polynômes

SAVOIR-FAIRE

Qui dit racine dit factorisation...



$$P(a) = 0 \Leftrightarrow$$

Exercice 8 (B.E.O.) : $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
 - (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 - (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

4 Familles

Exercice 9 : Soit $f : x \mapsto e^{-x}$, $g : x \mapsto 1$ et $h : x \mapsto e^x$. Montrer que la famille (f, g, h) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 10 : Montrer que $(1, X - 2, \dots, (X - 2)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

5 Sous-espaces vectoriels



SAVOIR-FAIRE

Il faut savoir montrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel d'un espace de référence :

- par la méthode des trois points,
- par la méthode de l'espace vectoriel engendré, quand c'est possible.



SAVOIR-FAIRE

Il faut avoir **compris** ce que représente la dimension d'un espace vectoriel. C'est le « nombre de paramètres libres de varier ».



SAVOIR-FAIRE

Il faut savoir montrer l'égalité de deux espaces vectoriels :

- par double-inclusion,
- en dimension finie, par une inclusion et l'égalité des dimensions.

Exercice 11 : Questions de dimension. Ici, on ne demande pas de démonstration. On demande de **comprendre**.

1. Pourquoi dit-on qu'on vit dans un espace de dimension 3 ?
2. Comment se fait-il que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\}$ est un espace de dimension 2 ?
3. Quelle est la dimension de $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$?
4. Donner, en expliquant, la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices diagonales, de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n , de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices qui ont tous les coefficients nuls, hormis sur les bords, de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices symétriques, de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice 12 (B.E.O.) : Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n . *Indication* : discuter suivant les valeurs de a .

6 Représentations matricielles d'une application linéaire, noyau, image

Dans le cas où f et g sont des endomorphismes d'un espace de dimension finie n , en notant A et B leur représentation matricielle relativement à une base de E , on a les correspondances suivantes.

objets	représentation matricielle
$x \in E$	$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathcal{L}(E)$	$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$f(x) \in E$	AX
$f + g$	$A + B$
$f \circ g$	AB
f^{-1} (si $f \in \text{GL}(E)$)	A^{-1}

SAVOIR-FAIRE

Il faut savoir déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire.

- Dans le cas où l'on dispose d'une famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de l'ensemble de départ, on a la formule très efficace :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

- Pour trouver le noyau, une possibilité est de résoudre $f(x) = 0$ en utilisant $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0$.
 - On vérifie la cohérence des résultats avec le théorème du rang.
-



Exercice 13 : Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{pmatrix}$. On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

1. Déterminer $\text{Im } f$.
2. Donner une représentation matricielle de f .
3. Déterminer le noyau de f .