Familles sommables – révisions printemps 2024

Exercice 1 (Centrale PC 2023)

1. Montrer que la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable, où

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ j & \text{si } i = j \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i < j \end{cases}$$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j}$. Que pensez-vous de $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j}$?

Exercice 2

On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On pose $a_{n,p} = \dfrac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{n+1,n}|$ diverge. En déduire que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_{0,p}$.
3. Pour $n \geqslant 1$, $q \geqslant n$, vérifier que $\displaystyle\sum_{p=0}^{q} a_{n,p} = \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=q-n+1}^{q+n}\frac{1}{k}$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = -\frac{\pi^2}{8}$$

4. Que vaut $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$?

Exercice 3

Montrer de deux façons que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)(m+n+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ n'est pas sommable :

1. en utilisant une sommation par paquets,
2. par une méthode directe.