Mines 2015 Partie 1
MP
Révisions avril 2024

Certains d'entre vous ont fait la partie 2 dans le devoir maison n^o 16.

Soit n un entier strictement positif. On identifie $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ dans $\mathbb{R}^n$, on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^2}.$$

La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$ et en déduire l'existence de :

$$\|M\|_{\mathrm{op}} = \max\{\|Mx\| \,;\, x \in S^{n-1}\}.$$

2) Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\|M\|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité : $\|Mx - My\| \leqslant \|M\|_{\mathrm{op}} \|x - y\|$.

3) Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{\mathrm{op}} = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale.

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{\mathrm{op}}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{\mathrm{op}} \geqslant \max\{|M_{i,j}| \,;\, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.

6) Établir que :

$$\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{i,j})^2}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leqslant 1$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

7) Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{\mathrm{op}} = n$.
