Épreuve Epita 2015 Tronc Commun

Sujet

Dans ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 2, par $\mathcal{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on fait les conventions suivantes :

- on identifie tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ et la matrice-colonne de ses composantes $x_1, \ldots, x_n$, et on définit la norme de ce vecteur x par :

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

  En particulier, on note v_1 le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

- on identifie tout endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui lui est associée dans la base canonique, et on définit la norme de cette matrice $A = (a_{i,j})$ par :

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

On notera qu'une suite $(A_k) = (a_{i,j}^{(k)})$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si la suite $(\|A_k - A\|_\infty)$ tend vers 0, soit encore si et seulement si les n^2 suites $(a_{i,j}^{(k)})$ des coefficients des matrices A_k convergent vers les n^2 coefficients $a_{i,j}$ de la matrice A.
Enfin, on désigne par S_n l'ensemble des matrices dites *stochastiques* d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) les n^2 coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M sont des nombres réels positifs.

2) la somme des éléments de chacune des n lignes de la matrice M vaut 1 :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,1} + m_{i,2} + \cdots + m_{i,n} = 1$$

Ces matrices stochastiques jouent un rôle important, en particulier en calcul des probabilités, comme le montre l'exemple traité dans la partie I. Dans la partie II, qui est indépendante, on étudie plus généralement la suite des puissances d'une matrice stochastique M.

Partie I : une intervention des matrices stochastiques en probabilités
On considère un combat entre deux tireurs A et B qui se déroule en une suite d'épreuves où A et B tirent simultanément l'un sur l'autre de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins un des deux tireurs :

— Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.

— Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.

— Lorsqu'un tireur est atteint, il est définivement éliminé des épreuves suivantes.

— Les résultats des différents tirs sont supposés indépendants les uns des autres.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :

— AB_n : « à l'issue de la n-ème épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés »

— A_n : « à l'issue de la n-ème épreuve, seul A n'est pas encore éliminé »

— B_n : « à l'issue de la n-ème épreuve, seul B n'est pas encore éliminé »

— O_n : « à l'issue de la n-ème épreuve, les deux tireurs sont éliminés »

On note E_n la matrice ligne à 4 colonnes donnée par :

$$E_n = \begin{pmatrix} P(AB_n) & P(A_n) & P(B_n) & P(O_n) \end{pmatrix}$$

Pour $n = 0$, comme A et B sont présents au début du combat, on a :

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calcul de probabilités*
   (a) Vérifier que $P_{AB_n}(AB_{n+1}) = \frac{2}{9}$.
   (b) Déterminer $P_{AB_n}(A_{n+1})$, $P_{AB_n}(B_{n+1})$ et $P_{AB_n}(O_{n+1})$.
   (c) Expliciter une matrice carrée d'ordre 4, M, telle que $E_{n+1} = E_n M$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Vérifier que la matrice M est stochastique, et montrer que $E_n = E_0 M^n$.
2. *Diagonalisation de M*
   (a) Préciser les valeurs propres de la matrice M avec leurs ordres de multiplicité.
   (b) Établir que la matrice M est diagonalisable et préciser les sous-espaces propres de M.
   (c) On considère 3 réels x, y, z et la matrice P définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

   Donner x, y, z pour que les colonnes de P soient des vecteurs propres de M.
   (d) Vérifier que P est inversible, donner $D = P^{-1}MP$ et expliciter P^{-1}.
3. *Probabilités que A et B remportent le combat*
   (a) Donner la limite de la suite matricielle (D^n).
   (b) Exprimer M^n en fonction de D^n et donner la limite de la suite matricielle (M^n).
   (c) En déduire la limite de la suite matricielle (E_n). Donner, en justifiant, les probabilités que A et B remportent le combat.
4. *Durée moyenne du combat*
   Soit T la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves réalisées avant la fin du combat.
   (a) Calculer $P(T = 1)$.
   (b) Calculer $P(T \geqslant n)$ et vérifier alors que $P(T = n) = \frac{7}{9}(\frac{2}{9})^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(T = n)$.
   (d) Donner l'espérance de T.

Partie II : Étude des puissances des matrices stochastiques

Dans toute cette partie, on désigne par M une matrice stochastique d'ordre n et on se propose d'étudier la convergence de la suite matricielle (M^k), et plus généralement de la suite de ses moyennes de Cesaro (X_k), définies par

$$C_k = \frac{1}{k+1}\left(I_n + M + M^2 + \cdots + M^k\right)$$

1. *Premiers résultats de convergence*
   (a) Établir que l'ensemble S_n des matrices stochastiques est stable par produit.
   (b) Établir que la limite éventuelle d'une suite de matrices stochastiques est stochastique.
   (c) Démontrer, si la suite (M^k) converge vers L, que L est une matrice de projection. On pourra à cet effet déterminer de deux manières la limite de la suite (M^{2k}).
   (d) Démontrer, si la suite (M^k) converge vers L, que la suite (C_k) converge aussi vers L.

2. *L'espace $\mathbb{C}^n$ comme somme directe de* $\ker(M - I_n)$ *et* $\mathrm{Im}(M - I_n)$
   (a) Déterminer Mv_1 et en déduire que 1 est valeur propre de M.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Mx\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$.
   En déduire que toute valeur propre de M est de module inférieur ou égal à 1.
   Quelles inégalités en déduit-on sur le déterminant et la trace de M ?
   (c) On considère un vecteur $y = Mx - x$ appartenant à $\mathrm{Im}(M - I_n)$. Dans l'hypothèse supplémentaire où $y \in \ker(M - I_n)$, montrer que $M^k x = ky + x$, puis que $\|y\|_\infty \leqslant \frac{2}{k}\|x\|_\infty$.

(d) En déduire que y est nul, puis que $\mathbb{C}^n = \ker(M - I_n) \oplus \operatorname{Im}(M - I_n)$.

Dans toute la suite du problème, on convient de désigner par P la matrice du projecteur sur le sous-espace $\ker(M - I_n)$ dans la direction de son supplémentaire $\operatorname{Im}(M - I_n)$.

3. *Étude de la convergence de la suite* (C_k)

   (a) On décompose un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ dans la somme directe $\mathbb{C}^n = \ker(M - I_n) \oplus \operatorname{Im}(M - I_n)$ en posant $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = Px \in \ker(M - I_n)$ et $x_2 = Mz - z \in \operatorname{Im}(M - I_n)$.
   Donner l'expression de $C_k x$ et montrer que $\|C_k x - Px\|_\infty \leqslant \frac{2\|z\|_\infty}{k+1}$.

   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\lim\limits_{k \to +\infty} C_k x = Px$, puis que $\lim\limits_{k \to +\infty} C_k = P$.

   (c) En déduire la limite de la suite (M^k) lorsque celle-ci est convergente.

4. *Étude de la convergence de la suite* (M^k)
   On suppose la matrice M diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et on fait l'hypothèse supplémentaire suivante : pour $2 \leqslant i \leqslant p$, on a $|\lambda_i| < 1$.

   (a) Établir, si x est un vecteur propre de M associé à une valeur propre λ différente de 1, qu'on a l'égalité $(\lambda - 1)x = (M - I_n)x$.
   En déduire, si λ est une valeur propre différente de 1, que $\ker(M - \lambda I_n) \subset \operatorname{Im}(M - I_n)$.

   (b) Établir l'inclusion :

   $$\ker(M - \lambda_2 I_n) \oplus \cdots \oplus \ker(M - \lambda_p I_n) \subset \operatorname{Im}(M - I_n)$$

   et montrer qu'on a l'égalité : $\ker(M - \lambda_2 I_n) \oplus \cdots \oplus \ker(M - \lambda_p I_n) = \operatorname{Im}(M - I_n)$.

   (c) On décompose un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sur la somme directe des sous-espaces propres de M en posant

   $$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p \text{ avec } x_i \in \ker(M - \lambda_i I_n) \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant p$$

   Montrer que $x_1 = Px$, exprimer $M^k x - Px$ à l'aide de k, de $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$, de $x_2, \ldots, x_p$, puis en déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k x = Px$, puis que $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = P$.

   (d) Donner enfin un exemple d'une matrice stochastique telle que la suite (M^k) diverge.
