Les 2 premiers exercices de e3a 2021

Le troisième exercice a été fait pendant la période de révisions. Le quatrième exercice a été fait dans le DS n° 3.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall x \in I,\ f_0(x) = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.
2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.

   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.
3. Étudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.
4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I.
6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.
8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on a : $J = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.
9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 2

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\ |\ )$ et la norme $\|\ \|$.

On note Id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E que l'on suppose non inversible et non nul.
   (a) Citer le **théorème spectral.**
   (b) Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.
   (c) Montrer que les sous-espaces $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
   Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

   On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j\in[\![0,k]\!]}$ avec :

   $$k \geqslant 1, \quad \lambda_0 = 0 \text{ et } 0 < |\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k|.$$

   Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

2. (a) Montrer que $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

   (b) Prouver que l'on a pour tout couple (i, j) de $[\![0, k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

   (c) Démontrer que : $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j$.

   (d) Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.

   On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

3. **Quelques propriétés de l'inverse généralisé.**

   (a) Montrer que l'on a : $f \circ f^I = p$.
   En déduire que : $\forall (x, y) \in E^2, \Big(f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \ker(f) \Big)$.

   (b) Soit y un vecteur de E.
   Montrer que l'on a : $\forall x \in E, \ \Big(\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \ker(f) \Big)$.

4. **Application à un exemple.**
   On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.
   Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier que f est un endomorphisme autoadjoint, non nul et non inversible.

   (b) Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A.

   (c) En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
   On note pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathcal{B}$.

   (d) Justifier que l'on peut écrire A sous la forme : $A = 2M_1 + 4M_2$.

   (e) Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.

   (f) Démontrer que : $\forall x \in E$, $p_2(x) = (x|v_2)v_2$.

   (g) Déterminer la matrice M_2.

5. En déduire la matrice associée à f^I relativement à la base $\mathcal{B}$.
