CCINP 2020 épreuve 2
MP
Révisions avril 2024

Nous avons fait le problème dans le devoir surveillé n° 5.

Exercice 1

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$.
3. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P.
4. Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, à l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :
$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$
Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Application :
Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.
À l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.
5. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.
