E3A 2023 Sujet entier
MP
Révisions avril 2024

Lycée Camille PISSARRO

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!], P_k = X^k$.

Questions de cours
Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, \ldots, (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.
2. Soit P un polynôme de E_n.
   Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.
3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
   Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

****

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right)P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.
5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.
6. Écrire la matrice M de T dans la base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E_n.
7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.
   (a) Montrer que P est de degré n.
   (b) Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.
   (c) En déduire une expression de P.
8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
   L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Questions de cours

1. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :
   (A) : $\mathrm{e}^{b\ln(a)}$ (B) : $\mathrm{e}^{a\ln(b)}$ (C) : $\mathrm{e}^{\ln(a)\,\mathrm{la}(b)}$.
2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0, 1[$.
   Comparer t^x et t^y.

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

   On admet que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif :

   $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

   Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

****

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x}\ \mathrm{d}t$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

(b) Déterminer le sens de variation de F.

(c) Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geqslant \frac{1}{2}$.

(d) Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

(e) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

(f) Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0) = \frac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

5. Soit x un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g_n(t) = \dfrac{t^{nx}\ln^n(t)}{n!}$.

   (a) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et donner sa somme.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.

Établir enfin que l'on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}$$

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)du$.

1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

   Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.
3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.
4. Montre que Ψ est un endomorphisme de E.
5. **Surjectivité de Ψ**

   Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

   (a) Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_{+.}$.
   (b) La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
   (c) Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
   Montrer que la fonction $x \mapsto xg(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{+.}$.
   (d) A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?
   (e) Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.
7. **Recherche des éléments propres de Ψ**

   (a) Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.
   Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

   $$y' + \frac{\mu}{x}y = 0$$

   (b) Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.
   (d) Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

   $$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

   On note $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

   (a) **On veut montrer que la famille $B = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une base de F_n**
   Soient $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0$. $(*)$

      i. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
      On pourra simplifier l'expression (*) par x lorsque x est non nul.
      ii. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$.
      Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.
      iii. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

   (b) **Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n**

      i. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.
      ii. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

   (c) Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.
   (d) Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.
   (e) Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto z(x) = \begin{cases} (x + x^2)\ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.
   Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul.

Questions de cours

1. Soit p une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.
   (a) Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.
   (b) Donner les spectres possibles de W.
   (c) Comparer $\mathrm{rg}(W)$ et $\mathrm{tr}(W)$.
   (d) Calculer $\det(W)$.

****

On considère la famille $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}\,(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

2. On note T la variable aléatoire $\mathrm{tr}(M)$.
   (a) Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.
   (b) Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.
3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \mathrm{rg}(M)$.
4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.
   (a) Déterminer $D(\Omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.
5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement Z :
   « les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »

   (a) On note V l'évènement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbb{P}(V)$.
   (b) On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.
   (c) On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbb{P}(T = r)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.
6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = (a_{ij}(\omega))_{[\![1,n]\!]^2}$.
   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}(\omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.
   (c) Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (d) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.
   (e) Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.
   (f) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.