e3a

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1.

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\,\cos(p)\,\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\,\sin(p)\,\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n\,\cos(nx)}{n\,!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathscr{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,C(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,C(x)\,\mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.

4.2 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\alpha^n\,\cos^2(nx)}{n\,!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de E_n sera notée I_n.

Soit $A \in E_n$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note A_j la j-ième colonne de la matrice A.

Soit u l'application qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont les colonnes B_j sont :

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad B_j = S - A_j = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} A_k \quad \text{où} \quad S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1. Dans cette question $n = 2$ et E_2 est muni de la base : $\mathscr{B} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$

où $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1 Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.

1.2 Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de E_2.

1.3 Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

On revient au cas général et on admettra que u est un endomorphisme de E_n.

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a :

$$\det(u(A)) = (-1)^{n-1}\,(n-1)\,\det(A)$$

4.

4.1 Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme u.

4.2 En déduire les éléments propres de l'endomorphisme u. Est-il diagonalisable ?

5. Soient J_n la matrice de E_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $U_n = J_n - I_n$.

5.1 Déterminer les colonnes du produit matriciel AU_n à l'aide de celles de A.

5.2 Retrouver alors le résultat de la question **4.1**.

Exercice 3.

On se propose de déterminer toutes les fonctions f solutions du problème $(\mathscr{P})$ suivant :

$$(f \text{ est continue sur } \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t \quad : \ (E_1)\right)$$

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1.1 Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1.2 Montrer que si f vérifie (E_1), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que f est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si :

$$(\mathscr{P}_1) \quad \begin{cases} f \ \text{ est dérivable sur } \ \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) + x\,f(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

3. En déduire que f est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si :

$$(\mathscr{P}_2) \quad \begin{cases} F \ \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\quad F''(x) + x\,F'(x) + 2\,F(x) = 0 \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

4. On suppose qu'il existe une fonction H développable en série entière sur $\mathbb{R}$: $H(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\quad H''(x) + x\,H'(x) + 2\,H(x) = 0 \\ H'(0) = 1 \ \text{ et } \ H(0) = 0 \end{cases}$$

4.1 Prouver que l'on a : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}$.

4.2 En déduire une expression de $H(x)$ pour tout x réel à l'aide de fonctions usuelles.

5. Déterminer alors l'ensemble des solutions du problème $(\mathscr{P})$.

Exercice 4.

__**Question de cours**__ : Soit E un espace euclidien. Redonner sans démonstration la dimension de $E^{\perp}$.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $< P|Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$

On note $\mathscr{B}_n = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de E.

Soit u l'application qui à $P \in E$ associe $u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \displaystyle\int_0^1 (x+t)^n\ P(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.

2.

2.1 Prouver que pour tous p et q dans $[\![0, n]\!]$, on a : $< u(X^p)|X^q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)(n+p+1-k)}$

2.2 En déduire que u est un endomorphisme symétrique.

3. On sait qu'il existe alors une base **orthonormale** $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.

Montrer que : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, P_j(x)\ P_j(y)$.

Pour y réel, on pourra décomposer le polynôme $Q_y = (X+y)^n$ dans la base $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.

4. Déterminer alors $\mathbf{tr}(u)$ (trace de l'endomorphisme u).

5.

5.1 Pour tout y réel, montrer que l'on a : $u(Q_y)(y) = \dfrac{1}{2n+1}\ \left[(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right]$.

5.2 Déterminer $\mathbf{tr}(u^2)$. On pourra calculer $\displaystyle\int_0^1 u(Q_y)(y)\, \mathrm{d}y$.

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1110 – D'après documents fournis