D'après épreuve Centrale PSI 2018 (deux premières parties)

Sujet

Notations
Si f est une fonction de classe C^∞ et p un entier naturel, on note $f^{(p)}$ la dérivée $p^{\text{ème}}$ de f.
On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Si a et b sont deux entiers naturels, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b.
Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une espérance, celle-ci est notée $E(X)$.

I Moments d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.
Si $p \in \mathbb{N}$, on dit que X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire X^p est d'espérance finie. On note alors $m_p(X)$, appelé *moment d'ordre p de X*, l'espérance de X^p.

On remarque que $m_0(X) = 1$.

Q1 Justifier que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant X^k \leqslant 1 + X^n$.

Q2 En déduire que, si X admet un moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

I.A - Fonction génératrice des moments

On suppose que, pour tout entier naturel non nul n, X admet un moment d'ordre n et que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} m_n(X)\dfrac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R_X > 0$.

Pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, on note $M_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} m_n(X)\dfrac{t^n}{n!}$. La fonction M_X s'appelle la *fonction génératrice* des moments de la variable aléatoire X.

Q3 Justifier que la connaissance de la fonction M_X permet de déterminer de manière unique la suite $\big(m_n(X)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q4 Montrer que, pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance finie et que

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Q5 Montrer réciproquement que, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in]-R, R[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance finie, alors l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $]-R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$, $M_X(t) = E(e^{tX})$.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs strictement positives admettant des moments de tous ordres. On note R_X (respectivement R_Y) le rayon de convergence (supposé strictement positif) associé à la fonction M_X (respectivement M_Y).

Q6 Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ admet des moments de tous ordres et que

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), \quad M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

I.B - Exemples

λ est un nombre réel fixé.

I.B.1) On suppose que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q7 Montrer que Z admet des moments de tous ordres.

Q8 Calculer la fonction génératrice des moments de Z. En déduire les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$.

I.B.2) Soit n un entier naturel non nul. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre λ/n. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et on pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Q9 Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire S_n.

Q10 Pour $t \in \mathbb{C}$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_{S_n}(t)$.

Q11 Comparer avec les résultats de la question 8.

I.B.3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y_n = \frac{1}{n} U_n$.

Q12 Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n.

Q13 Pour $t \in \mathbb{C}$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_{Y_n}(t)$.

II. Moments d'une suite numérique

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que, pour tout entier naturel p, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n^p a_n$ converge absolument, on appelle moment d'ordre p de la suite (a_n) le nombre $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^p a_n$.

Le but de cette partie est de construire une suite non nulle dont tous les moments d'ordre p ($p \in \mathbb{N}$) sont nuls.

II.A - Étude d'une fonction

On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty, 1\right[, & \varphi(x) = \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) \\ \forall x \in \left[1, +\infty\right[, & \varphi(x) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Q14 Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Q15 Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \varphi'(x)$ et démontrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q16 Montrer que, pour tout entier naturel non nul p, il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x \in]-\infty, 1[$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

Q17 En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \varphi^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Q18 En déduire que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\varphi^{(p)}(1)$.

II.B - Développements en série

Q19 Démontrer, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2}$$

On considère les polynômes de Hilbert

$$\begin{cases} H_0(X) = 1 \\ H_n(X) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X-k) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{2}$$

Q20 Démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2} + p - 1\right) x^p$$

Q21 En déduire

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right)$$

où l'on a posé

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{i,j}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j\left(\frac{i-1}{2} + j\right) x^{i+j+1}$$

Q22 Démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)| \right) = \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}} \right) - 1.$

Q23 Établir l'égalité

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k\left(\frac{n+k}{2} - 1\right) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}} \tag{3}$$

II.C - Un prolongement dans $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{D}$ le disque ouvert unité de $\mathbb{C}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\}$.

Q24 Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge.

Pour $z \in \mathcal{D}$, on note $\Phi_0(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et, sous réserve de convergence,

$$\Phi_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} z^n$$

Q25 Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1,1[$, $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} z^n$ converge.

Q26 Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi^{(p)}$ est bornée sur $]-1,1[$. On pourra utiliser Q16.

On admet que la fonction Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$.

Q27 Soit r un réel de l'intervalle $]0,1[$. Démontrer pour, tous entiers $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, que

$$(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}r^n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi_p(re^{\mathrm{i}\theta})e^{-n\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Q28 Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un réel K_p et un entier naturel N_p tels que

$$\forall n \geqslant N_p, \quad |a_n| \leqslant \frac{K_p}{n^p}$$

Q29 Démonter que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ et donner la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Q30 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ et donner la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}$.

Q31 Démontrer que tous les moments d'ordre p de la suite (a_n) sont nuls.

Éléments de réponse

Mathématiques II Centrale PSI 2018

I Moments d'une variable aléatoire

Q1 Soit $\omega \in \Omega$.
Si $0 \leqslant X(\omega) \leqslant 1$, alors comme $X \geqslant 0$, on a $0 \leqslant X^k(\omega) \leqslant 1 \leqslant 1 + X^n(\omega)$.
Si $X(\omega) \geqslant 1$, on a $X^k(\omega) \leqslant X^n(\omega) \leqslant 1 + X^n(\omega)$.

$$\forall \omega \in \Omega,\ 0 \leqslant X^k(\omega) \leqslant 1 + X^n(\omega)$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad 0 \leqslant X^k \leqslant 1 + X^n}$$

Q2 Si X admet un moment d'ordre n alors $1 + X^n$ est d'espérance finie. Le théorème de domination, et la question précédente, apportent que $\boxed{X^k \text{ est d'espérance finie pour } k \in [\![1, n-1]\!]}$.

I.A - Fonction génératrice des moments

Q3 Comme somme de série entière, M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et par le cours, la série entière correspond à sa série de Taylor en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{m_n(X)}{n!} = \frac{M_X^{(n)}(0)}{n!} \text{ soit encore } m_n(X) = M_X^{(n)}(0)$$

$\boxed{\text{La suite } (m_n) \text{ est donc bien parfaitement déterminée par la donnée de la fonction } M_X.}$

Q4 Soit $t \in]-R_X, R_X[$. Je note $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Dans $[0, +\infty]$, par la formule du transfert,

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tx_k} P(X = x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx_k)^n}{n!} P(X = x_k) \end{aligned}$$

On étudie s'il y a possibilité d'intervertir. Dans $[0, +\infty]$, par le théorème de Fubini positif,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(tx_k)^n}{n!} P(X = x_k)\right| &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(|t|x_k)^n}{n!} P(X = x_k) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|t|^n}{n!} m_n(X) = M_X(|t|) < +\infty \text{ car } |t| < R_X \end{aligned}$$

Donc la famille $\left(\frac{(tx_k)^n}{n!} P(X = x_k)\right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. Par le théorème de Fubini :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t|x_k^n}{n!} P(X = x_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} m_n(X) = M_X(t)$$

Donc $\boxed{e^{tX} \text{ est d'espérance finie et } E(e^{tX}) = M_X(t)}$.

Q5 Réciproquement, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in]-R, R[$, la variable aléatoire e^{tX} est d'espérance finie, alors pour tout $t \in]-R, R[$, on a comme précédemment $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(tx_k)^n}{n!} P(X = x_k)\right| < +\infty$.
La famille $\left(\frac{(tx_k)^n}{n!} P(X = x_k)\right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, et on peut reprendre les calculs précédents.

L'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $]-R,R[$ et pour tout $t\in]-R,R[$, $M_X(t)$ est encore égal à $E(e^{tX})$.

Q6 • Montrons que la variable aléatoire $X+Y$ admet des moments de tous ordres. On a

$$(X+Y)^p=\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}X^nY^{p-n}$$

Les variables aléatoires X^n et Y^{p-n} sont indépendantes (transfert d'indépendance), d'espérance finie (par hypothèse), leurs produits ont aussi une espérance qui est le produit des espérances. Enfin, par linéarité de l'espérance, $(X+Y)^p$ est d'espérance finie, valant :

$$E((X+Y)^p)=\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}E(X^n)E(Y^{p-n})=\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}m_n(X)m_{p-n}(Y).$$

• Soit t tel que $|t|<\min(R_X,R_Y)$.
$M_X(t)$ et $M_Y(t)$ sont bien définis, et $M_X(t)M_Y(t)=E(e^{tX})E(e^{tY})$. Les variables aléatoires e^{tX} et e^{tY} admettent une espérance finie et sont indépendantes (par transfert d'indépendance à partir de X et Y indépendantes). Par propriété d'espérance d'un produit :

$$E(e^{tX})E(e^{tY})=E(e^{tX}e^{tY})=E(e^{t(X+Y)})$$

Par la question Q5, $E(e^{t(X+Y)})=M_{X+Y}(t)$.
$\boxed{\text{Ainsi, pour } t<\min(R_X,R_Y),\ M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t).}$

I.B - Exemples

Q7 Z vérifie $P(Z=n)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$. On a $n^kP(Z=n)=o(\frac{1}{n^2})$ et $\frac{1}{n^2}\geqslant 0$ et la série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge. Par négligeabilité, $\sum\limits_n n\mathrm{P}(Z=n)$ converge absolument, et Z admet des moments de tout ordre.
Par la formule de transfert :

$$m_p(Z)=\sum_{n\geqslant 0}e^{-\lambda}\frac{n^p\lambda^n}{n!}$$

Q8 Pour $t\geqslant 0$, par le théorème de Fubini positif, dans $[0,+\infty]$:

$$\sum_{p\geqslant 0}m_p(Z)\frac{t^p}{p!}=\sum_{p\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0}e^{-\lambda}\frac{n^p\lambda^n}{n!}\frac{t^p}{p!}=e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{p\geqslant 0}\frac{n^pt^p}{p!}=e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!}e^{nt}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}<+\infty$$

donc pour tout $t\geqslant 0$, la série $\sum\limits_{p\geqslant 0}m_p(Z)\frac{t^p}{p!}$ converge. Donc le rayon de cette série entière est $+\infty$. Comme vu en question Q3, $m_1(Z)=M_Z'(0)$ et $m_2(Z)=M_Z''(0)$.

$$M_Z'(t)=\lambda e^te^{\lambda(e^t-1)},\quad M_Z''(t)=(\lambda e^t+\lambda^2e^{2t})e^{\lambda(e^t-1)}\qquad m_1(Z)=m_Z'(0)=\lambda,\quad m_2(Z)=\lambda+\lambda^2.$$

On retrouve l'espérance et la variance de la loi de Poisson.

Q9 Par stabilité pour la somme de lois binomiales $\mathcal{B}(1,\frac{\lambda}{n})$ indépendantes, S_n suit une loi binomiale $B(n,\lambda/n)$.

$$\begin{aligned}M_{S_n}(t)&=E(e^{t(X_1+\dots+X_n)})=E(e^{tX_1+\dots+tX_n})\\&=E(e^{tX_1})\dots E(e^{tX_n})\text{ par transfert d'indépendance, les }X_i\text{ étant indépendantes}\\&=[E(e^{tX_1})]^n\text{ puisque les }X_i\text{ ont même loi}\\&=(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda e^t}{n})^n\text{ avec la formule du transfert}\end{aligned}$$

Q10 Je vous laisse montrer (grand classique rencontré plusieurs fois en classe) :

$$\lim_{n\to+\infty}M_{S_n}(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

Q11 On a trouvé $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} M_{S_n}(t) = M_{\mathcal{P}(\lambda)}(t)}$.

Q12 On a $P(Y_n = \frac{k}{n}) = \frac{1}{n}$ pour k entre 1 et n. Par la formule du transfert : $m_p = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p$,

$$M_{Y_n}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{t^p}{p!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{tk}{n}\right)^p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{tk/n}$$

Q13 On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction continue $x\mapsto e^{tx}$. On a donc, à t fixé, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} M_{Y_n}(t) = \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}}$.

II. Moments d'une suite numérique

II.A - Étude d'une fonction

Q14 Je vous laisse rédiger que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on a $\varphi(x)\to 0$ sans forme indéterminée, donc φ est continue en 1, puis $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

Q15

$$\varphi'(x) = \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{(1-x)^{3/2}}\right) = -\frac{\varphi(x)}{(1-x)^{3/2}}$$

Je vous laisse rédiger $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\varphi'(x) = 0$.

La limite à droite est 0 aussi, donc par le théorème de la limite de la dérivée (la fonction est continue, C^1 sauf éventuellement en 1 et sa dérivée a une limite finie en 1), $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$. Et $\varphi'(1)=0$.

Q16 Je vous laisse montrer par récurrence, pour tout entier naturel non nul p, $\mathcal{H}_p$:« il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x\in]-\infty,1[$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})}\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) = R_p(\sqrt{1-x})\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) \text{ »}$$

Q17-18 Je vous laisse mettre en place une récurrence : comme en Q15., le théorème de la limite de la dérivée s'applique dans l'hérédité (si φ est de classe C^{p-1}, on montre que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\varphi^{(p)}(x) = 0$ par croissance comparée). On trouvera : $\boxed{\text{pour tout } p\in\mathbb{N}^*,\ \varphi^{(p)}(1) \text{ existe et vaut } 0}$.

II.B - Développements en série

Q19 Par le développement en série entière de l'exponentielle, il vient

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}\frac{(-x)^q}{\sqrt{1-x}^q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}x^q(1-x)^{-q/2}.$$

Q20 D'après le développement en série entière « $(1+x)^\alpha$ », on a

$$\begin{aligned}(1-x)^{-q/2} &= \sum_{p\geqslant0}\binom{-q/2}{p}(-x)^p = \sum_{p\geqslant0}\frac{(-q/2)(-q/2-1)\dots(-q/2-p+1)}{p!}(-1)^px^p\\ &= \sum_{p\geqslant0}\frac{(q/2+p-1)\dots(q/2+1)q/2}{p!}x^p\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x\in]-1,1[$ et tout $q\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\boxed{(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty}H_p\left(\tfrac{q}{2}+p-1\right)x^p}$$

Q21 On a
$$\varphi(x)=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}x^q(1-x)^{-q/2}=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}x^qH_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right)x^p$$
En isolant les termes d'indice $q=0$:
$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\sum_{p=0}^{+\infty}H_p(p-1)x^p+\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}x^qH_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right)x^p\\&=H_0(-1)+0+\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}x^qH_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right)x^p\end{aligned}$$
Avec le changement d'indice $q=i+1$, on trouve bien
$$\forall x\in]-1,1[,\quad \varphi(x)=1+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}a_{i,j}(x)\right)\ \text{où l'on a posé}\ \forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\quad a_{i,j}(x)=\frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!}H_j\left(\frac{i-1}{2}+j\right)x^{i+j+1}.$$

Q22 On a $H_j\left(\frac{i-1}{2}+j\right)\geqslant 0$ puisque i et j sont $\geqslant 0$ (le dernier terme du numérateur est $\frac{i+1}{2}$). Donc
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|a_{i,j}(x)|\right)&=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{(i+1)!}H_j(\frac{i-1}{2}+j)|x|^{i+j+1}\right)\\&\quad\text{on remonte les calculs de la question précédente}\\&=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{|x|^q}{q!}\sum_{p=0}^{+\infty}H_p(\frac{q}{2}+p-1)|x|^p-1\\&=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{|x|^q}{q!}(1-|x|)^{-q/2}-1\end{aligned}$$
Et finalement, pour tout $x\in]-1,1[$,
$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|a_{i,j}(x)|\right)=\exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right)-1}$$

Q23 Par la question précédente, la famille $(a_{i,j}(x))_{i,j}$ est sommable. On peut appliquer une sommation par paquets :
$$\begin{aligned}1+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}a_{i,j}(x)\right)&=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2,i+j=n}\frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!}H_j(\frac{n-1+j}{2})x^{n+1}\\&\quad(m=n+1)\\&=1+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2,i+1+j=m}\frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!}H_j(\frac{m+j}{2}-1)x^m\\&\quad(k=j)\\&=1+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}}{(m-k)!}H_j(\frac{m+k}{2}-1)x^m\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\quad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n}$$
où
$$\boxed{\begin{cases}a_0=1\\ a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}H_k\left(\frac{n+k}{2}-1\right)\quad\text{pour tout }n\in\mathbb{N}^*\end{cases}}\tag{4}$$

II.C - Un prolongement dans $\mathbb{C}$

Q24 Pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum a_n x^n$ converge par Q23. Et cela venait de $\sum |a_n x^n|$ converge en Q22. Donc pour tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, donc converge.

Q25 Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières affirme que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1,1[$, $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$ et que les séries entières gardent le même rayon de convergence (ici 1) après dérivation. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}z^n$ converge.

Q26 Rappelons que la fonction $\varphi^{(p)}$ s'exprime sous la forme $R_p(\sqrt{1-x})\exp(\frac{-x}{\sqrt{1-x}})$ pour $x < 1$ et 0 pour $x \geqslant 1$. Je vous laisse rédiger que cette fonction admet une limite nulle en 1, ce qui fait qu'elle est continue sur $[-1,1]$. Par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée sur ce segment.

$\boxed{\Phi_p = \varphi^{(p)} \text{ est bornée sur }]-1,1[.}$

On admet que la fonction Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$.

Q27 Soit r un réel de l'intervalle $]0,1[$.
La série entière $\sum\limits_n (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}z^n$ converge normalement sur le disque $D_f(0,r)$ car $r < R$ (une série entière converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence). Donc la série entière

$$\theta \mapsto \sum_n (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}r^n e^{n\mathrm{i}\theta}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc sur $[0,2\pi]$.

Ceci autorise à intégrer terme à terme le développement en série de $\Phi_p(re^{\mathrm{i}\theta})e^{-n\mathrm{i}\theta}$ sur le segment $[0,2\pi]$. Or $\int\limits_0^{2\pi}(re^{\mathrm{i}\theta})^k e^{-n\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$ quand $k \neq n$, il reste donc

$$(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_p(re^{\mathrm{i}\theta})e^{-n\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Q28 $|\Phi_p|$ est bornée par une constante K_p (admis en Q26) donc

$$\forall r \in]0,1[\qquad |a_{n+p}|r^n \leqslant \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_p\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{K_p}{n^p}$$

et en faisant tendre r vers 1 on a l'inégalité voulue par passage à la limite.

Q29 On pose $h_n(x) = a_n x^n$, de sorte que $0 \leqslant \|h_n\|_{\infty,\,[0,1]} \leqslant |a_n|$. Par la question précédente, $a_n = O(\frac{1}{n^2})$. Par domination, $\sum |a_n|$ converge, puis la série $\|h_n\|_{\infty,\,[0,1]}$ converge. On en déduit la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} h_n$ sur $[0,1]$.

On a donc convergence uniforme, et par le théorème de transmission de continuité, la somme de la série entière est continue sur $[0,1]$. En particulier, on exploite la continuité en 1 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to 1} a_n x^n = \lim_{x\to 1}\varphi(x) = 0 \text{ d'après Q14}$$

Q30 En Q28, nous avons établi que $a_{n+p} = O(\frac{1}{n^p})$. p étant fixé, cela prouve que $a_n = O(\frac{1}{(n-p)^p}) = O(\frac{1}{n^p})$. On a donc une convergence vers 0 plus rapide que n'importe quelle série de Riemann. En particulier, pour $p \in \mathbb{N}^*$ on $a_n = O(\frac{1}{n^{p+2}})$ et $(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} = O(\frac{1}{n^2})$. On en déduit la convergence normale de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$ sur $[0,1]$. La convergence normale, donc uniforme, permet d'appliquer la version « dérivée p-ième » du théorème de dérivation terme à terme, ce qui donne pour somme de cette série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n = \varphi^{(p)}(x) = \Phi_p(x)$$

et en particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} = \Phi_p(1) = 0 \quad \text{d'après Q18.}$$

Q31 On en déduit par récurrence que tous les moments d'ordre p de la suite (a_n) sont nuls. Comprenons le début :

$$\begin{array}{rcl}
m_0 & = & \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n = 0 \qquad \text{(d'après Q29)} \\
\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_n & \underset{\text{(d'après Q30)}}{= 0} & = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} na_n + \sum_{n\geqslant 0} a_n = m_1 + m_0 \quad \text{donc} \quad m_1 = 0 \\
\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_n & \underset{\text{(d'après Q30)}}{= 0} & = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 a_n + \sum_{n\geqslant 0} 3na_n + \sum a_n = m_2 + 3m_1 + 2m_0 \quad \text{donc} \quad m_2 = 0 \\
\cdots & & \cdots
\end{array}$$